

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ им. В. А. СТЕКЛОВА
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

А. В. Домрин, А. Г. Сергеев

Лекции по комплексному анализу

Второе полугодие

Москва
2004

УДК 517.5
ББК (В)22.16
Д66

Домрин А. В., Сергеев А. Г.

Д66 Лекции по комплексному анализу : В 2 частях. / А. В. Домрин,
А. Г. Сергеев. — М.: МИАН, 2004.

ISBN 5-98419-006-0

Часть II : Второе полугодие. — 2004. — 136 с.

ISBN 5-98419-008-7

Издание осуществлено при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 04-01-14126).

ISBN 5-98419-008-7 (ч. II) © Домрин А. В., Сергеев А. Г., 2004

ISBN 5-98419-006-0 © Математический институт
им. В. А. Стеклова РАН, 2004

Памяти Анатолия Георгиевича Витушкина

Содержание

Первое полугодие	1
Лекция 1. Комплексная плоскость	1
1.1. Определение	1
1.2. Алгебраическая структура	2
1.3. Полярное представление	2
1.4. Топология комплексной плоскости	4
1.5. Компактификация комплексной плоскости	8
Лекция 2. Комплексная дифференцируемость. Геометрический смысл производной	12
2.1. $\mathbb{R}$ -дифференцируемость	12
2.2. $\mathbb{C}$ -дифференцируемость. Условия Коши–Римана	13
2.3. Производная по направлению	15
2.4. Голomorphic функции и конформные отображения	17
2.5. Геометрический смысл комплексной производной	18
2.6. Голomorphicность и конформность отображений расширенной комплексной плоскости	20
Лекция 3. Дробно-линейные функции	21
3.1. Дробно-линейные отображения расширенной комплексной плоскости	21
3.2. Конформность дробно-линейных отображений	22
3.3. Группа дробно-линейных отображений	23
3.4. Круговое свойство дробно-линейных отображений	24
3.5. Сохранение симметрии при дробно-линейных отображениях	26
3.6. Свойство трех точек	30
3.7. Дробно-линейные изоморфизмы основных областей	31
Лекция 4. Интеграл и первообразная	35
4.1. Определение интеграла вдоль пути	35
4.2. Свойства интеграла вдоль пути	38
4.3. Лемма Гурса	42
4.4. Первообразная	45
4.5. Первообразная вдоль пути	47
Лекция 5. Теорема Коши	53
5.1. Теорема Коши о гомотопии	53
5.2. Теорема Коши для многосвязной области	59

5.3.	Интегральная формула Коши	62
Лекция 6.	Ряды Тейлора	65
6.1.	Напоминание	65
6.2.	Разложение голоморфной функции в ряд Тейлора	66
6.3.	Неравенства Коши	67
6.4.	Теорема Лиувилля	67
6.5.	Множество точек сходимости степенного ряда .	68
6.6.	Голоморфность суммы степенного ряда	72
6.7.	Бесконечная дифференцируемость голоморфных функций	74
6.8.	Коэффициенты ряда Тейлора	74
6.9.	Интегральная формула Коши для производных	75
6.10.	Теорема Морера	75
6.11.	Три эквивалентных определения голоморфной функции	76
6.12.	Разложение голоморфной функции в окрестно- сти нуля	76
6.13.	Теорема единственности	78
6.14.	Теорема Вейерштрасса о рядах голоморфных функций	79
6.15.	Аппроксимация голоморфных функций полино- мами	81
Лекция 7.	Ряды Лорана и особые точки	82
7.1.	Разложение голоморфной функции в ряд Лорана	82
7.2.	Сходимость рядов по целым степеням $z - a$. . .	85
7.3.	Неравенства Коши для коэффициентов Лорана	86
7.4.	Замечание о рядах Лорана и Фурье	87
7.5.	Изолированные особые точки. Определение . . .	88
7.6.	Описание устранимых особых точек	89
7.7.	Описание полюсов	90
7.8.	Теорема Сохоцкого	93
7.9.	$a = \infty$ как изолированная особая точка	94
7.10.	Целые функции с полюсом на бесконечности . .	95
7.11.	Мероморфные функции с полюсом на бесконеч- ности	95
Лекция 8.	Вычеты	97
8.1.	Теорема Коши о вычетах	97
8.2.	Вычет в терминах ряда Лорана	98
8.3.	Формулы для вычисления вычетов	99
8.4.	Вычет в точке $a = \infty$	100

8.5.	Теорема о полной сумме вычетов	101
8.6.	Лемма Жордана	101
8.7.	Пример на вычисление преобразования Фурье от рациональных функций	103
Лекция 9.	Аналитическое продолжение. Постановка задачи	106
9.1.	Постановка задачи	106
9.2.	Аналитическое продолжение Γ -функции	107
9.3.	Аналитическое продолжение логарифма	110
Лекция 10.	Теория Вейерштрасса	114
10.1.	Постановка задачи	114
10.2.	Элементы и их аналитическое продолжение	115
10.3.	Свойства непосредственного аналитического про- должения	116
10.4.	Продолжение канонических элементов вдоль пути	118
10.5.	Эквивалентность аналитического продолжения по цепочке и вдоль пути	120
10.6.	Теорема о продолжении вдоль гомотопных путей	122
Лекция 11.	Аналитические функции	126
11.1.	Определения	126
11.2.	Пример: аналитическая функция $\sqrt{z}$	128
11.3.	Пример: аналитическая функция $\ln z$	130
11.4.	Действия над аналитическими функциями	131
11.5.	Изолированные особые точки аналитической функции	134
11.6.	Классификация изолированных особых точек	136
11.7.	Примеры аналитических функций и их особых точек	138
11.8.	Ряды Пуизо	140
Лекция 12.	Римановы поверхности	144
12.1.	Риманова поверхность функции $w = \sqrt{z}$	144
12.2.	Риманова поверхность функции $w = \ln z$	147
12.3.	Риманова поверхность функции $w = \arcsin z$	147
12.4.	Риманова поверхность аналитической функции	149
12.5.	Одномерные комплексные многообразия	150
12.6.	Неразветвленные голоморфные накрытия	152
12.7.	Риманова поверхность аналитической функции (продолжение)	158
Список литературы		163

Второе полугодие	165
Лекция 13. Принцип аргумента	165
13.1. Логарифмический вычет	165
13.2. Принцип аргумента	167
13.3. Теорема Руше	169
Лекция 14. Принцип сохранения области и обращение голо-	
морфных функций	174
14.1. Принцип сохранения области	174
14.2. Локальное обращение голоморфных функций	175
14.3. Теорема Гурвица	179
Лекция 15. Принцип максимума модуля и его следствия	181
15.1. Принцип максимума модуля	181
15.2. Лемма Шварца	183
Лекция 16. Принцип компактности. Последовательности го-	
ломорфных функций	186
16.1. Принцип компактности	186
16.2. Теорема Монтеля	188
16.3. Непрерывные функционалы на семействах го-	
ломорфных функций	190
Лекция 17. Теорема Римана	192
17.1. Автоморфизмы основных областей	192
17.2. Теорема Римана	195
Лекция 18. Соответствие границ и принцип симметрии	200
18.1. Принцип соответствия границ	200
18.2. Принцип симметрии	203
Лекция 19. Конформное отображение полуплоскости на мно-	
гоугольник	213
19.1. Конформное отображение полуплоскости на пря-	
моугольник	213
19.2. Интеграл Кристоффеля–Шварца	219
Лекция 20. Эллиптические функции	225
20.1. Эллиптический синус	225
20.2. Периоды мероморфных функций	228
20.3. Определение и свойства эллиптических	
функций	230
Лекция 21. Функция Вейерштрасса	234
21.1. Определение и основные свойства	234
21.2. Описание эллиптических функций с заданной	
решеткой периодов	239

21.3.	Дифференциальное уравнение для функции Вейерштрасса	242
Лекция 22.	Реализация тора в виде кубической кривой в $\mathbb{C}^2$	246
22.1.	Определения тора и кубической кривой в $\mathbb{C}^2$	246
22.2.	Параметризация кубической кривой с помощью функции Вейерштрасса	248
22.3.	Сложение точек на кубической кривой	250
Лекция 23.	Модулярная функция и теорема Пикара	254
23.1.	Построение модулярной функции	254
23.2.	Теорема Пикара	262
Лекция 24.	Гармонические функции	265
24.1.	Определение и основные свойства гармонических функций	265
24.2.	Задача Дирихле	270
Дополнение.	Физическая интерпретация голоморфных функций и доказательство теоремы Римана	276
Д.1.	Гидродинамическая интерпретация конформных отображений	276
Д.2.	“Физическое” доказательство теоремы Римана	283
Д.3.	Другие физические интерпретации голоморфных функций	287
Список литературы		289

Второе полугодие

Лекция 13. Принцип аргумента

13.1. Логарифмический вычет. Пусть функция f голоморфна в проколотой окрестности $V = \{0 < |z - a| < r\}$ точки a и не имеет нулей в V . Тем самым, точка a является изолированной особенностью как для функции f , так и для функции $1/f$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Логарифмическим вычетом* функции f в точке a называется вычет ее логарифмической производной $f'(z)/f(z)$ в этой точке. Иными словами, логарифмический вычет f в точке a равен

$$\operatorname{res}_a \frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-a|=\rho} \frac{f'(z)}{f(z)} dz \quad \text{для любого } 0 < \rho < r.$$

Вычислим логарифмический вычет мероморфной функции в ее нуле и полюсе.

ПРИМЕР 13.1. Пусть a — нуль порядка n функции f , голоморфной в окрестности a . Тогда в некоторой окрестности U точки a справедливо разложение

$$f(z) = (z - a)^n \varphi(z),$$

где φ голоморфна и не имеет нулей в U . Следовательно,

$$\begin{aligned} \frac{f'(z)}{f(z)} &= \frac{n(z - a)^{n-1} \varphi(z) + (z - a)^n \varphi'(z)}{(z - a)^n \varphi(z)} \\ &= \frac{1}{z - a} \cdot \frac{n\varphi(z) + (z - a)\varphi'(z)}{\varphi(z)} =: \frac{\psi(z)}{z - a}, \end{aligned}$$

где функция ψ голоморфна в U и $\psi(a) = n \neq 0$. Поэтому *логарифмический вычет f в нуле порядка n равен n .*

ПРИМЕР 13.2. Пусть a — полюс порядка p функции f . Тогда функция $g(z) := 1/f(z)$ имеет при $z = a$ нуль порядка p . Поскольку $f'/f = -g'/g$, получаем, что *логарифмический вычет f в полюсе порядка p равен $-p$.*

Приведенные примеры подсказывают, что с помощью логарифмического вычета мероморфной функции можно подсчитать число ее нулей и полюсов с учетом их кратности. Это подтверждается нижеследующей теоремой.

ТЕОРЕМА. Пусть $D \subset \mathbb{C}$ — область с простой границей и $f(z)$ — функция, которая мероморфна в области $G \supset \overline{D}$ и не имеет нулей и полюсов на ∂D . Обозначим через $N(f, D)$ и $P(f, D)$ соответственно число нулей и полюсов f в области D (с учетом их кратностей). Тогда

$$N(f, D) - P(f, D) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f'}{f} dz. \quad (13.1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку функция f мероморфна в окрестности замыкания $\overline{D}$ области D , в этой области имеется лишь конечное число нулей $a_1, \dots, a_k$ и полюсов $b_1, \dots, b_l$ функции f (см. п. 7.11). Функция $g := f'/f$ голоморфна всюду в окрестности замыкания $\overline{D}$, за исключением точек $\{a_1, \dots, a_k, b_1, \dots, b_l\}$. Поэтому к ней применима теорема Коши о вычетах:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f'}{f} dz = \sum_{i=1}^k \operatorname{res}_{a_i} \frac{f'}{f} + \sum_{j=1}^l \operatorname{res}_{b_j} \frac{f'}{f}.$$

Согласно вычислениям, проведенным в примерах 13.1 и 13.2, правая часть равна $N(f, D) - P(f, D)$, что и требовалось доказать. ■

ЗАДАЧА. Примеры 13.1 и 13.2 показывают, что логарифмическая производная f'/f функции f имеет в точке a полюс 1-го порядка всякий раз, когда сама функция f имеет нуль или полюс в этой точке. Докажите обратное: если f голоморфна в проколотой окрестности точки a и f'/f имеет в точке a полюс 1-го порядка, то f имеет в этой точке нуль или полюс.

13.2. Принцип аргумента. Пусть $\gamma: I \rightarrow \mathbb{C}$ — непрерывный путь на комплексной плоскости, параметризованный единичным отрезком $I = [0, 1]$, и $f: \gamma(I) \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ — функция, непрерывная вдоль γ .

Тогда найдется непрерывная функция $\theta: I \rightarrow \mathbb{R}$ такая, что

$$f(\gamma(t)) = |f(\gamma(t))|e^{i\theta(t)} \quad \text{для всех } t \in I. \quad (13.2)$$

Такая функция θ определяется не единственным образом, но любые две подобные функции θ_1, θ_2 отличаются на константу $2\pi n$ для некоторого $n \in \mathbb{Z}$. (Доказательство этих утверждений повторяет рассуждения из п. 4.5 и оставляется читателю в качестве упражнения.)

Отсюда следует, в частности, что вещественное число

$$\theta(1) - \theta(0)$$

не зависит от выбора функции θ . Оно называется *приращением аргумента функции f вдоль пути γ* и обозначается через

$$\Delta_\gamma \arg f.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 13.1. Приращение аргумента $\Delta_\gamma \arg f$ не зависит от выбора параметризации пути γ . Точнее, если заменить путь γ на путь $\gamma \circ \Phi$, где $\Phi: I \rightarrow I$ — любое биективное монотонно возрастающее непрерывное отображение, то

$$\Delta_{\gamma \circ \Phi} \arg f = \Delta_\gamma \arg f \quad (\text{почему?}).$$

Тем самым, приращение аргумента функции f корректно определено не только вдоль пути γ , но и вдоль задаваемой им *ориентированной кривой*.

Заметим, что для монотонно убывающего биективного отображения $\Phi: I \rightarrow I$ правая и левая части этого равенства отличаются знаком:

$$\Delta_{\gamma \circ \Phi} \arg f = -\Delta_\gamma \arg f.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 13.2. Рассмотрим отображение $w = f(z)$, задаваемое функцией f , и обозначим через Γ путь $\Gamma = f \circ \gamma$. Заметим, что функция (см. формулу (13.2))

$$F(t) := \ln |f(\gamma(t))| + i\theta(t)$$

является первообразной функции $g(w) := 1/w$ вдоль Γ (проверьте это!). Поэтому, применяя формулу Ньютона–Лейбница, получим:

$$\int_{\Gamma} g(w) dw = \int_{f \circ \gamma} \frac{dw}{w} = F(1) - F(0),$$

откуда

$$\int_{f \circ \gamma} \frac{dw}{w} = \ln \frac{|f(\gamma(1))|}{|f(\gamma(0))|} + i(\theta(1) - \theta(0)). \quad (13.3)$$

Из этой формулы можно вывести два полезных следствия. Во-первых, взяв от обеих частей последнего равенства мнимую часть, получим, что

$$\operatorname{Im} \int_{f \circ \gamma} \frac{dw}{w} = \Delta_{\gamma} \arg f$$

для произвольного пути γ . Во-вторых, для любого замкнутого непрерывного пути $\gamma: I \rightarrow \mathbb{C}$ и любой непрерывной функции $f: \gamma(I) \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ формулу (13.3) можно переписать в виде

$$\int_{f \circ \gamma} \frac{dw}{w} = i \Delta_{\gamma} \arg f. \quad (13.4)$$

ПРИНЦИП АРГУМЕНТА. Пусть $D \subset \mathbb{C}$ — область с простой границей, причем ∂D связна и, следовательно, является кусочно гладкой жордановой кривой. (Напомним, что ∂D ориентирована так, что область D остается слева при обходе вдоль ∂D .) Пусть функция $f(z)$ мероморфна в области $G \supset \overline{D}$ и не имеет нулей и полюсов на ∂D . Тогда

$$N(f, D) - P(f, D) = \frac{1}{2\pi} \Delta_{\partial D} \arg f. \quad (13.5)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Параметризуем ∂D отображением

$$\gamma: I \rightarrow \mathbb{C}.$$

Пользуясь формулой (13.1) и определением интеграла, запишем левую часть формулы (13.5) в виде

$$\begin{aligned} N(f, D) - P(f, D) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f'(z)}{f(z)} dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 \frac{f'(\gamma(t))}{f(\gamma(t))} \gamma'(t) dt = \frac{1}{2\pi i} \int_{f \circ \gamma} \frac{dw}{w}. \end{aligned}$$

Но

$$\int_{f \circ \gamma} \frac{dw}{w} = i \Delta_{\partial D} \arg f$$

согласно формуле (13.4), откуда и следует доказываемая формула (13.5). ■

ЗАМЕЧАНИЕ. Геометрически, правая часть формулы (13.5), равная $\frac{1}{2\pi} \Delta_{\partial D} \arg f$, совпадает с числом оборотов, совершаемых точкой $f(z)$ вокруг начала координат, когда переменная z (однократно) обегает ∂D против часовой стрелки. Пользуясь этой интерпретацией, удастся иногда вычислить приращение аргумента $\Delta_{\partial D} \arg f$, глядя на изображение $f(\gamma)$. К сожалению, такое случается редко, чаще прибегают к доказываемой в следующем параграфе теореме Руше.

13.3. Теорема Руше. Эта теорема позволяет подсчитывать число нулей голоморфной функции в области, отбрасывая “малые” слагаемые.

ТЕОРЕМА РУШЕ. Пусть, как и в принципе аргумента, $D \subset \mathbb{C}$ есть область, ограниченная кусочно гладкой жордановой кривой. Предположим, что функции f и g голоморфны в области $G \supset \overline{D}$, причем

$$|f(z)| > |g(z)| \quad \text{при всех } z \in \partial D.$$

Тогда функции f и $f + g$ имеют в области D одинаковое число нулей.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что функции f и $f + g$ не обращаются в нуль на ∂D , поскольку

$$|f(z)| > |g(z)| \quad \text{для всех } z \in \partial D.$$

Поэтому к функции $f + g$ применим принцип аргумента, согласно которому

$$N(f + g, D) = \frac{1}{2\pi} \Delta_{\partial D} \arg(f + g). \quad (13.6)$$

Воспользуемся тем, что приращение аргумента произведения двух непрерывных функций вдоль пути равно сумме приращений их аргументов (это свойство вытекает непосредственно из

определения приращения аргумента). Тогда

$$\begin{aligned}\Delta_{\partial D} \arg(f+g) &= \Delta_{\partial D} \arg \left[f \left(1 + \frac{g}{f} \right) \right] \\ &= \Delta_{\partial D} \arg f + \Delta_{\partial D} \arg \left(1 + \frac{g}{f} \right).\end{aligned}$$

Покажем, что

$$\Delta_{\partial D} \arg \left(1 + \frac{g}{f} \right) = 0. \quad (13.7)$$

Неформально, это равенство вытекает из того, что образ ∂D при отображении $w(z) = 1 + g(z)/f(z)$ целиком лежит в круге $\{w : |w - 1| < 1\}$ (поскольку $|g(z)/f(z)| < 1$ при $z \in \partial D$) и потому точка $w(z)$ не может сделать ни одного полного оборота вокруг начала координат при обходе z вдоль ∂D .

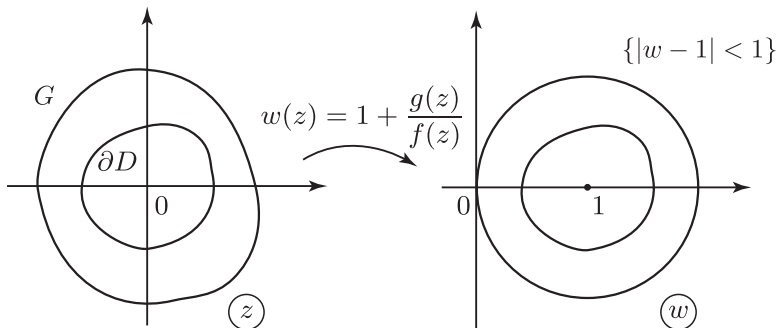


Рис. 57

Формальное доказательство можно провести так. По формуле (13.4)

$$\Delta_{\partial D} \arg w(z) = \frac{1}{i} \int_{f(\partial D)} \frac{dw}{w}. \quad (13.8)$$

Функция $1/w$ имеет первообразную в круге $\{|w - 1| < 1\}$ (ее можно указать явно: $F(w) = \ln |w| + i \arg w$, где $-\pi/2 < \arg w < \pi/2$, — или же просто сослаться на предложение 4.2 из п. 4.4). Поэтому правая часть формулы (13.8) равна нулю по формуле Ньютона–Лейбница.

С учетом равенства (13.7) получаем из формулы (13.6), снова пользуясь принципом аргумента:

$$N(f + g, D) = \frac{1}{2\pi} \Delta_{\partial D} \arg f = N(f, D),$$

что и требовалось доказать. ■

ЗАМЕЧАНИЕ. Теорема Руше вытекает из следующего чисто топологического утверждения, которое доказывается так же, как и выше. Пусть $\gamma: I \rightarrow \mathbb{C}$ — замкнутый непрерывный путь и $f, g: \gamma(I) \rightarrow \mathbb{C}$ — две непрерывные функции на образе $\gamma(I)$, удовлетворяющие оценке

$$|f(z)| > |g(z)| \quad \text{для всех } z \in \gamma(I).$$

Тогда приращение аргумента суммы $f + g$ вдоль γ совпадает с приращением аргумента f вдоль γ , т.е.

$$\Delta_\gamma \arg(f + g) = \Delta_\gamma \arg f.$$

Приведем ряд примеров применения принципа аргумента и теоремы Руше. Первый из них (основную теорему алгебры) мы разберем полностью, а другие оставим в виде задач.

УТВЕРЖДЕНИЕ (основная теорема алгебры). *Любой многочлен P_n степени n с комплексными коэффициентами имеет ровно n комплексных корней (с учетом кратности).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как P_n имеет полюс порядка n на бесконечности, то все корни P_n лежат внутри некоторого круга $\{|z| < R\}$. Запишем P_n в виде

$$P_n(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n =: f + g,$$

где

$$f(z) = a_0 z^n, \quad g(z) = a_1 z^{n-1} + \dots + a_n \quad \text{и} \quad a_0 \neq 0.$$

Увеличивая, если необходимо, R , можно считать, что

$$|f(z)| > |g(z)| \quad \text{при} \quad |z| = R.$$

Применяя теорему Руше к функциям f, g в круге $\{|z| < R\}$, получим, что $P_n = f + g$ имеет в этом круге столько же нулей, сколько и $f(z) = a_0 z^n$, т.е. ровно n . ■

Задачи. (1) Покажите, что для всякого $\varepsilon > 0$ каждая из функций $\operatorname{tg} z$, $\operatorname{ctg} z$, $1/\sin z$, $1/\cos z$ ограничена вне ε -окрестности множества своих полюсов.

Указание: каждая из этих функций периодична и имеет конечные пределы при $|\operatorname{Im} z| \rightarrow \infty$.

(2) Докажите, что все решения $z \in \mathbb{C}$ уравнения $\operatorname{tg} z = z$ вещественны.

Указание: пользуясь теоремой Руше и первой задачей, найдите число нулей функции $\operatorname{tg} z - z$ в круге $\{|z| < \pi n\}$ при большом $n \in \mathbb{N}$ и сравните его с числом вещественных нулей в этом круге.

(3) В условиях теоремы из п. 13.1 покажите, что для всякой функции $g \in \mathcal{O}(\overline{D})$ справедливо равенство

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f'(z)}{f(z)} g(z) dz = \sum_{s=1}^k g(a_s) - \sum_{t=1}^l g(b_t),$$

где $a_1, \dots, a_k$ — нули, а $b_1, \dots, b_l$ — полюсы функции f в области D . Заметим, что сама теорема из п. 14.1 получается отсюда при $g(z) \equiv 1$.

(4) Обозначим через λ_n единственное решение уравнения $\operatorname{tg} x = x$ на интервале $(n - \frac{1}{2})\pi < x < (n + \frac{1}{2})\pi$, где $n = 1, 2, \dots$. Вычислите сумму ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^2}.$$

Указание: примените задачу (3) к функциям $f(z) = \sin z - z \cos z$ и $g(z) = 1/z^2$ в области $D = \{\varepsilon < |z| < \pi n\}$, а затем устремите $n \rightarrow \infty$ и $\varepsilon \rightarrow 0$. Тогда интеграл по окружности $\{|z| = \pi n\}$ будет стремиться к нулю в силу задачи (1).

(5) Применяя рассуждение из предыдущей задачи к функциям

$$f(z) = \sin(\pi z) \quad \text{и} \quad g(z) = \frac{1}{z^2 + a^2},$$

найдите сумму ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + a^2}$$

для всех $a > 0$.

Приведем еще две задачи, иллюстрирующие применение теоремы Руше в различных ситуациях. (Впоследствии они будут также решены другими методами, см. пп. 15.1 и 24.2.)

Задачи. (6) Пусть

$$P_n(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n$$

для некоторых $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$. Докажите, что

$$\max_{|z| \leq 1} |P_n(z)| \geq 1,$$

причем равенство достигается только при $P_n(z) = z^n$.

(7) Докажите, что уравнение $\sin z = z$ имеет в $\mathbb{C}$ бесконечно много решений.

Лекция 14. Принцип сохранения области и обращение голоморфных функций

14.1. Принцип сохранения области.

ТЕОРЕМА. *Если функция f голоморфна в области $D \subset \mathbb{C}$ и не равна тождественно константе, то и образ $D^* := f(D)$ является областью.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем, что множество D^* (линейно) связно и открыто.

Связность D^* является чисто топологическим фактом и устанавливается следующим образом. Пусть w_1, w_2 — произвольные точки D^* и $z_1, z_2 \in D$ — их прообразы при отображении f , т.е. $f(z_1) = w_1$, $f(z_2) = w_2$. В силу связности D существует непрерывный путь $\gamma: I \rightarrow D$ с началом в точке z_1 и концом в точке z_2 . Тогда $f \circ \gamma$ есть непрерывный путь в D^* , соединяющий w_1 с w_2 .

Открытость D^* является уже фактом комплексного анализа и, вообще говоря, не имеет места для произвольных гладких отображений комплексной плоскости. Пусть w_0 — произвольная точка из D^* . Укажем круг U^* с центром в этой точке, целиком лежащий в D^* .

Пусть $z_0 \in D$ — один из прообразов w_0 при отображении f . Выберем $r > 0$ так, чтобы круг

$$U := \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}$$

компактно принадлежал D и замкнутый круг $\bar{U}$ не содержал других прообразов w_0 , кроме z_0 (это возможно, так как в силу условия $f \not\equiv \text{const}$ нули голоморфной функции $f(z) - w_0$ изолированы). Положим

$$r^* := \min_{z \in \partial U} |f(z) - w_0|.$$

Заметим, что $r^* > 0$, поскольку $f(z) \neq w_0$ на ∂U . Покажем, что круг

$$U^* := \{w \in \mathbb{C} : |w - w_0| < r^*\}$$

содержится в D^* , т.е. каждая точка $w \in U^*$ имеет прообраз из U . Для этого запишем функцию $f(z) - w$, рассматриваемую как функция от z , в виде

$$f(z) - w = (f(z) - w_0) + (w_0 - w).$$

Тогда при $z \in \partial U$ будем иметь

$$|f(z) - w_0| \geq r^* > |w_0 - w|,$$

так что к функциям $f(z) - w_0$ и $w_0 - w$ в круге U применима теорема Руше. Согласно этой теореме $f(z) - w$ имеет в U столько же нулей, сколько и $f(z) - w_0$, т.е. по крайней мере один. Следовательно, $U^* \subset f(U)$ и, тем более, $U^* \subset D^*$. ■

Задачи. (1) Пусть $U = \{|z| < 1\}$ — единичный круг. Покажите, что для любого (в том числе пустого) конечного множества $X \subset \mathbb{C}$ существует функция $f \in \mathcal{O}(U)$ такая, что $f(U) = \mathbb{C} \setminus X$. В частности, образ односвязной области при непостоянном голоморфном отображении не обязан быть односвязной областью.

(2) Пусть U — единичный круг, $f \in \mathcal{O}(\overline{U})$ и $|f(z)| \equiv \text{const}$ на ∂U . Покажите, что f либо постоянна в U , либо имеет там нули.

14.2. Локальное обращение голоморфных функций.

Задача о локальном обращении голоморфных функций формулируется следующим образом:

пусть функция $w = f(z)$ голоморфна в окрестности точки z_0 . Требуется найти голоморфную в окрестности точки $w_0 = f(z_0)$ функцию $z = g(w)$ такую, что $g(w_0) = z_0$ и

$$f \circ g(w) \equiv w$$

в окрестности w_0 .

Случай I: z_0 не является критической точкой f , т.е. $f'(z_0) \neq 0$.

Так же как в доказательстве принципа сохранения области, выберем круг $U = \{z : |z - z_0| < r\}$ так, что $f \in \mathcal{O}(\overline{U})$ и $\overline{U}$ не содержит других прообразов точки w_0 , кроме z_0 . Положим

$$r^* := \min_{z \in \partial U} |f(z) - w_0|.$$

Тогда круг $U^* = \{w : |w - w_0| < r^*\}$ содержится в $f(U)$ и каждая точка $w \in U^*$ имеет в U столько же прообразов, сколько и w_0 , т.е. ровно одну (с учетом кратности). С другой стороны, в силу непрерывности f существует $r_1 \in (0, r)$ такое, что образ при f круга $U_1 = \{z : |z - z_0| < r_1\}$ содержится в U^* .

Таким образом, функция f однолистка в круге U_1 и в окрестности $f(U_1)$ точки w_0 определена обратная функция $z = g(w)$ такая, что $z_0 = g(w_0)$ и

$$f \circ g(w) \equiv w \quad \text{для всех } w \in f(U_1).$$

Покажем, что функция $z = g(w)$ голоморфна в точке w_0 , т.е. $\mathbb{C}$ -дифференцируема в ее окрестности. Возьмем произвольную точку $w_1 \in f(U_1)$ и положим $z_1 = g(w_1)$. Покажем, что функция $g(w)$ $\mathbb{C}$ -дифференцируема в точке w_1 , и найдем ее комплексную производную в этой точке. Заметим вначале, что g непрерывна на $f(U_1)$, поскольку из сходимости $w \rightarrow w_1$ следует, что $z := g(w) \rightarrow z_1$ (в противном случае последовательность значений $z = g(w)$ имела бы в $\overline{U}_1 \subset U$ предельную точку, отличную от z_1 , т.е. w_1 имела бы в U два различных прообраза при отображении f). Далее, отношение

$$\frac{g(w) - g(w_1)}{w - w_1} = \frac{z - z_1}{f(z) - f(z_1)}$$

имеет при $w \rightarrow w_1$ предел, равный $\frac{1}{f'(z_1)}$. (Заметим, что $f'(z_1) \neq 0$, поскольку

$$f'(z)|_{z=z_1} = \frac{d}{dz}(f(z) - w_1) \Big|_{z=z_1} \neq 0,$$

так как $z = z_1$ — однократный нуль функции $f(z) - w_1$.) Отсюда следует, что функция g $\mathbb{C}$ -дифференцируема в точке w_1 и $g'(w_1) = \frac{1}{f'(z_1)}$, что и требовалось доказать.

Тем самым, задача о локальном обращении голоморфной функции в окрестности не критической точки решена. Заметим, что в процессе доказательства нами была установлена также теорема об обратной функции для голоморфных функций.

Случай II: z_0 — критическая точка f порядка p , т.е. $f'(z_0) = \dots = f^{(p-1)}(z_0) = 0$, но $f^{(p)}(z_0) \neq 0$ при некотором целом $p \geq 2$.

Как и в случае I, выберем круг $U = \{z : |z - z_0| < r\}$ так, что $f \in \mathcal{O}(\overline{U})$ и $\overline{U}$ не содержит других прообразов точки w_0 и нулей $f'(z)$, кроме z_0 . Тогда функция f будет принимать в круге U каждое значение $w \in U^* = \{w : |w - w_0| < r^*\}$ столько же раз, сколько и w_0 . По условию значение w_0 принимается с кратностью p , так как $f(z) - w_0$ имеет в точке z_0 нуль порядка p . Следовательно, любое значение $w \in U^* \setminus \{w_0\}$ принимается функцией f в круге U ровно p раз, причем в p различных точках (поскольку $f'(z) \neq 0$ при $z \in U \setminus \{z_0\}$). Заменяя U на меньший круг U_1 такой, что $f(U_1) \subset U^*$, мы получаем, что отображение $f: U_1 \rightarrow f(U_1)$ является p -листным накрытием, разветвленным в центре z_0 круга U_1 .

Покажем, что в рассматриваемом случае естественное “локальное обращение” $z = f^{-1}(w)$ функции $w = f(z)$ является аналитической функцией в области $f(U_1) \setminus \{w_0\}$. Эта аналитическая функция задается продолжением вдоль всевозможных путей в $f(U_1) \setminus \{w_0\}$ начального элемента вида (V, g) , где V — круг в $f(U_1) \setminus \{w_0\}$ с центром в некоторой точке $w_1 \neq w_0$, а g — голоморфная в V функция, удовлетворяющая соотношению

$$f \circ g(w) \equiv w \quad \text{на } V.$$

Перейдем к построению указанной аналитической функции. При $z \in U_1$

$$f(z) - w_0 = (z - z_0)^p \varphi(z),$$

где функция φ голоморфна и не имеет нулей в U_1 . Запишем это равенство в виде

$$w - w_0 = (z - z_0)^p \varphi(z)$$

и введем функцию

$$\zeta(z) = (w - w_0)^{1/p} := (z - z_0) \psi(z),$$

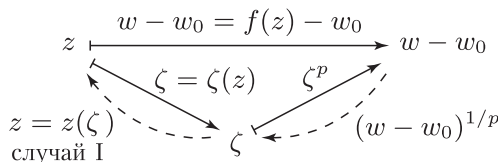
где $\psi(z)$ — произвольная голоморфная ветвь аналитической функции $\varphi(z)^{1/p}$ в круге U_1 (существование ветви доказывается так же, как в предложении из п. 11.4). Функция $\zeta(z)$ голоморфна в U_1 и

$$\zeta'(z_0) = \psi(z_0) \neq 0.$$

Поэтому согласно случаю I у этой функции существует локальная обратная функция $z = z(\zeta)$, голоморфная в окрестности точки $\zeta = 0$. Следовательно, локальное обращение функции $w = f(z)$ можно задать композицией функций $z = z(\zeta)$ и $\zeta = (w - w_0)^{1/p}$:

$$z = g(w) := z((w - w_0)^{1/p}).$$

Таким образом, локальное обращение функции $w = f(z)$ строится в рассматриваемом случае по следующей схеме:



Заметим, что если локальное обращение $z = z(\zeta)$ голоморфной функции $\zeta = \zeta(z)$ в окрестности точки $\zeta = 0$ задается рядом Тейлора

$$z = z(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \zeta^n,$$

то локальное обращение $z = g(w)$ функции $w = f(z)$ в окрестности точки z_0 будет задаваться рядом Пуанкаре (см. замечание 11.2 из п. 11.8) следующего вида:

$$z = g(w) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (w - w_0)^{n/p}.$$

Подводя итог, мы видим, что в рассматриваемом случае локальное обращение $z = g(w)$ голоморфной функции $w = f(z)$ вблизи точки z_0 является аналитической функцией в проколотой окрестности точки w_0 , причем w_0 есть точка ветвления порядка p для этой аналитической функции.

ТЕОРЕМА. Условие $f'(z_0) \neq 0$ необходимо и достаточно для локальной однолиственности голоморфной функции f в окрестности точки z_0 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $f'(z_0) \neq 0$, то мы имеем случай I, в котором функция f локально обратима. Если же $f'(z_0) = 0$, то либо $f \equiv \text{const}$, либо мы имеем случай II. В обеих ситуациях функция f не однолистна в окрестности z_0 . ■

ЗАМЕЧАНИЕ 14.1. Достаточность является фактом вещественного анализа: любое непрерывно дифференцируемое отображение $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ с ненулевым якобианом локально обратимо по теореме об обратной функции. Напротив, необходимость — это чисто комплексный факт, не имеющий места для неголоморфных функций: например, якобиан $\mathbb{C}$ -значной функции $f(x+iy) = x^3 + iy$ равен нулю в начале координат, но функция f все-таки однолистна.

ЗАМЕЧАНИЕ 14.2. Выполнения неравенства $f'(z) \neq 0$ для всех $z \in D$ достаточно для локальной, но не глобальной однолиственности функции $f \in \mathcal{O}(D)$. Например, целая функция $f(z) = e^z$ имеет ненулевую производную всюду в $\mathbb{C}$, но не однолистна ($f(z) = f(z + 2\pi i n)$ для любого $z \in \mathbb{C}$ и любого $n \in \mathbb{Z}$).

ЗАМЕЧАНИЕ 14.3. Отметим еще такое следствие из доказанной теоремы: *всякое голоморфное взаимно однозначное отображение $f: D_1 \rightarrow D_2$ области D_1 на область D_2 есть биголоморфизм* (т.е. обратное отображение автоматически голоморфно). Напомним, что определение биголоморфизма между областями было дано в п. 12.5 и там же было указано, что биголоморфизм D_1 на D_2 — это то же самое, что взаимно однозначное и конформное в каждой точке отображение D_1 на D_2 .

14.3. Теорема Гурвица.

ТЕОРЕМА ГУРВИЦА. Пусть последовательность функций f_n , голоморфных в области D , сходится в топологии $\mathcal{O}(D)$ (т.е. равномерно на компактах в D) к функции $f \not\equiv \text{const}$. Если точка $z_0 \in D$ является нулем функции f , т.е. $f(z_0) = 0$, то в любом круге $\{|z - z_0| < r\} \subset D$ все функции f_n , начиная с некоторой, также имеют нуль.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По теореме Вейерштрасса предельная функция f голоморфна в D . Поскольку достаточно доказать теорему лишь для достаточно малых кругов с центром z_0 , мы можем считать, что круг $U := \{|z - z_0| < r\}$ компактно принадлежит D и в $\bar{U}$ нет других нулей f , кроме z_0 . Положим

$$r^* := \min_{z \in \partial U} |f(z)|.$$

Из равномерной сходимости последовательности $\{f_n\}$ на ∂U вытекает, что найдется N такое, что для всех $n \geq N$ выполняется оценка

$$|f_n(z) - f(z)| < r^* \quad \text{для всех } z \in \partial U.$$

Тогда по теореме Руше функция

$$f_n(z) = f(z) + [f_n(z) - f(z)]$$

имеет в U столько же нулей, сколько и f , т.е. по крайней мере один. ■

СЛЕДСТВИЕ. Если последовательность функций f_n , голоморфных и однолистных в области D , сходится в топологии $\mathcal{O}(D)$ к функции $f \not\equiv \text{const}$, то f однолистка в D .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим, напротив, что f не однолистка в D , т.е. существуют точки $z_1, z_2 \in D$ такие, что

$$f(z_1) = f(z_2), \quad \text{но} \quad z_1 \neq z_2.$$

Рассмотрим последовательность функций

$$g_n(z) := f_n(z) - f_n(z_2),$$

которая сходится в топологии $\mathcal{O}(D)$ к функции $g(z) := f(z) - f(z_2)$. Предельная функция $g \not\equiv \text{const}$ и имеет нуль в точке z_1 . Обозначим через $U \subset D$ произвольный круг с центром z_1 , не содержащий z_2 . Тогда по теореме Гурвица все функции g_n , начиная с некоторой, имеют нуль в U , что противоречит однолистности функций f_n . ■

ЗАДАЧА. Постройте пример последовательности $f_n \in \mathcal{O}(D)$ неоднолистных в D функций, которая сходится в топологии $\mathcal{O}(D)$ к однолистной функции $f \in \mathcal{O}(D)$.

Лекция 15. Принцип максимума модуля и его следствия

15.1. Принцип максимума модуля.

ТЕОРЕМА 15.1. *Если функция f голоморфна в области D и ее модуль $|f|$ имеет в точке $z_0 \in D$ локальный максимум, то $f \equiv \text{const}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим, напротив, что $f \not\equiv \text{const}$, и рассмотрим круг $U = \{z : |z - z_0| < r\} \Subset D$, в котором $|f|$ достигает максимума, т.е.

$$|f(z_0)| \geq |f(z)| \quad \text{при} \quad |z - z_0| < r.$$

Тогда по принципу сохранения области множество $f(U)$ содержит целый круг U^* с центром в точке $w_0 := f(z_0)$. Выберем в этом круге произвольную точку w_1 с $|w_1| > |w_0|$. Тогда ее прообраз $z_1 \in U$ удовлетворяет неравенству

$$|f(z_1)| > |f(z_0)|,$$

откуда следует, что $|f|$ не может иметь локального максимума в точке z_0 . Противоречие. ■

ТЕОРЕМА 15.2. *Функция f , голоморфная в ограниченной области D и непрерывная в ее замыкании $\overline{D}$, достигает максимума модуля на границе ∂D области D .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $f \equiv \text{const}$, то утверждение очевидно. Если же $f \not\equiv \text{const}$, то максимум $|f(z)|$ по всем $z \in \overline{D}$, во-первых, достигается (поскольку функция $|f(z)|$ непрерывна на компакте $\overline{D}$), а во-вторых, не может достигаться во внутренней точке $\overline{D}$ по теореме 15.1. Следовательно, он достигается на ∂D . ■

ЗАМЕЧАНИЕ 15.1. Теорема 15.2 становится неверной, если опустить условие ограниченности области D . Например, если $D = \{\text{Im } z > 0\}$ и $f(z) = \sin z$, то $|f(z)| \leq 1$ при $z \in \partial D = \mathbb{R}$, но $|f(iy)| \rightarrow \infty$ при $y \rightarrow +\infty$. Тем более интересна следующая задача.

ЗАДАЧА. (1) Пусть $D = \{\text{Im } z > 0\}$ и функция $f \in \mathcal{O}(D)$ ограничена в D (т.е. $|f(z)| \leq M$ при всех $z \in D$) и непрерывна в $\overline{D}$. Покажите, что если

$$|f(z)| \leq 1 \quad \text{при} \quad z \in \partial D = \mathbb{R},$$

то $|f(z)| \leq 1$ и при всех $z \in \overline{D}$.

Указание: выберите $z_0 \in \mathbb{C} \setminus D$, примените теорему 15.2 к функции

$$f_\varepsilon(z) = f(z)(z - z_0)^{-\varepsilon}$$

на области $D_R = D \cap \{|z - z_0| < R\}$ для достаточно большого R и устремите $\varepsilon \rightarrow 0+$. Можно избежать многозначных функций, если использовать функции $f_n(z) = f(z)^n / (z - z_0)$ вместо $f_\varepsilon(z)$ и устремить затем $n \rightarrow \infty$. Это тот же прием, что и в задаче (2) из п. 5.3, дающей другое доказательство принципа максимума.

ЗАМЕЧАНИЕ 15.2. Теоремы 15.1 и 15.2 неверны для минимума модуля голоморфной функции. Пример: функция $f(z) = z$ в единичном круге $\{|z| < 1\}$. Однако если потребовать дополнительно от функции $f \in \mathcal{O}(D) \cap C(\overline{D})$, чтобы она не имела нулей в ограниченной области D , то $|f|$ будет достигать минимума на ∂D . Для доказательства достаточно применить теорему 15.2 к функции $g = 1/f$.

ЗАДАЧИ. (2) Пусть функции $f_1, \dots, f_n$ голоморфны в ограниченной области D и непрерывны в $\overline{D}$. Докажите, что максимум функции $|f_1| + \dots + |f_n|$ в $\overline{D}$ достигается на границе ∂D .

(3) Докажите, что если $f_1, \dots, f_n \in \mathcal{O}(D)$ и $|f_1| + \dots + |f_n| \equiv \text{const}$ в D , то все функции $f_1, \dots, f_n$ постоянны.

Указание: если в окрестности некоторой точки из D можно записать $f_j(z) = g_j^2(z)$ для некоторых голоморфных функций g_j ($j = 1, \dots, n$), то, складывая тождества типа тех, которые указаны в задачах (1), (2) из п. 7.3 для разложений g_j в ряды Тейлора, получим требуемый результат.

(4) Решите задачу (6) из п. 13.3, применив принцип максимума к функции $f(\zeta) = \zeta^n P(1/\zeta)$ на круге $|\zeta| < 1$.

(5) Покажите, что не существует функции $f(z)$, голоморфной в окрестности точки $z = 0$ и удовлетворяющей там уравнению

$$|f(z)|^2 = 1 + |z|^2.$$

(6) Покажите, что в окрестности любой другой точки $z_0 \in \mathbb{C}$ также не существует голоморфных функций $f(z)$ с

$$|f(z)|^2 = 1 + |z|^2.$$

Указание: далеко не всякая положительная функция $\varphi(z)$ без локальных максимумов и минимумов есть модуль некоторой голоморфной функции. Для этого необходимо, чтобы функция $\log \varphi(z)$ была вещественной частью голоморфной функции, т.е. являлась гармонической функцией, см. ниже п. 24.1.

15.2. Лемма Шварца.

ЛЕММА ШВАРЦА. Пусть функция f голоморфна в единичном круге $U = \{|z| < 1\}$, причем $f(0) = 0$ и

$$|f(z)| \leq 1 \quad \text{для всех } z \in U.$$

Тогда для всех $z \in U$ выполняется неравенство

$$|f(z)| \leq |z|,$$

причем если в некоторой точке $z_0 \in U \setminus \{0\}$ достигается равенство, то $f(z) = e^{i\theta} z$ для некоторой константы $\theta \in \mathbb{R}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим

$$g(z) := \frac{f(z)}{z} \quad \text{для } z \in U \setminus \{0\}$$

и $g(0) := f'(0)$. Функция g голоморфна в U . Действительно, сомнение вызывает только точка $z = 0$, но по условию $f(0) = 0$, так что ряд Тейлора функции $f(z)$ в начале координат имеет вид

$$f(z) = c_1 z + c_2 z^2 + \dots,$$

и, следовательно, функция g в окрестности начала координат задается рядом

$$g(z) = c_1 + c_2 z + \dots$$

с тем же радиусом сходимости, что и для f .

Если бы было дополнительно известно, что f непрерывна в $\overline{U}$, то из теоремы 15.2 немедленно вытекало бы, что

$$|g(z)| \leq \max_{|\zeta|=1} \frac{|f(\zeta)|}{|\zeta|} = \max_{|\zeta|=1} |f(\zeta)| \leq 1 \quad \text{при всех } z \in U,$$

т.е. утверждение леммы. Без условия непрерывности f в $\overline{U}$ можно действовать почти таким же образом. А именно любая заданная точка $z \in U$ принадлежит всем кругам вида

$$U_r := \{\zeta \in \mathbb{C} : |\zeta| < r\}$$

с $r_0(z) \leq r < 1$ (см. рис. 58). Применим теорему 15.2 к функции g в круге U_r при $r < 1$. Получим, что

$$|g(z)| \leq \max_{|\zeta|=r} \frac{|f(\zeta)|}{|\zeta|} \leq \frac{1}{r}.$$

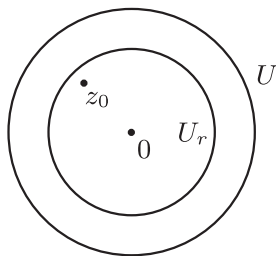


Рис. 58

Поскольку это неравенство выполняется при любом r , $r_0(z) \leq r < 1$, можно перейти в нем к пределу при $r \rightarrow 1 - 0$, что дает $|g(z)| \leq 1$, т.е. $|f(z)| \leq |z|$.

Если $|f(z_0)| = |z_0|$ (и тем самым $|g(z_0)| = 1$) для некоторого $z_0 \in U \setminus \{0\}$, то функция $|g|$ достигает локального максимума во внутренней точке $z_0 \in U$. Тогда по теореме 15.1 g тождественно равна константе, по модулю равной 1. ■

ЗАМЕЧАНИЕ. Хотя доказанное утверждение и называется леммой Шварца, оно было впервые сформулировано и доказано в указанном виде Каратеодори в 1912 г. Сам Шварц в 1869 г. доказал следующее утверждение: если $f \in \mathcal{O}(|z| \leq 1)$ и

$$|f(z)| \leq \delta \quad \text{при} \quad |z| \leq 1$$

(при этом не предполагается, что $f(0) = 0$), то $|f'(0)| \leq \delta$.

Задачи. (1) Выведите результат Шварца из неравенств Коши.

(2) Докажите следующее обобщение леммы Шварца. Положим $U = \{|z| < 1\}$ и

$$\rho(z_1, z_2) := \frac{|z_1 - z_2|}{|1 - z_1 \bar{z}_2|}.$$

Предположим, что функция $f \in \mathcal{O}(U)$ удовлетворяет неравенству

$$|f(z)| \leq 1 \quad \text{при} \quad z \in U.$$

Тогда для любых $z_1, z_2 \in U$ справедлива оценка

$$\rho(f(z_1), f(z_2)) \leq \rho(z_1, z_2).$$

При этом если для каких-то $z_1 \neq z_2$ в этой оценке достигается равенство, то функция f дробно-линейна. (Обычная лемма Шварца получается отсюда при $z_2 = 0$, $f(z_2) = 0$.)

(3) Пусть $U = \{|z| < 1\}$ и функция $f \in \mathcal{O}(U)$ удовлетворяет оценке

$$|f(z)| \leq 1 \quad \text{при } z \in U.$$

Предположим, что уравнение $f(z) = z$ имеет два различных решения $z_1 \neq z_2$ в круге U . Покажите, что $f(z) \equiv z$.

Лекция 16. Принцип компактности. Последовательности голоморфных функций

16.1. Принцип компактности.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Семейство функций $\mathcal{F} = \{f\}$, заданных в области D , называется *локально равномерно ограниченным*, если для любого компакта $K \Subset D$ найдется константа $A = A(K)$ такая, что

$$|f(z)| \leq A \quad \text{для всех } z \in K \text{ и всех } f \in \mathcal{F}.$$

Семейство $\mathcal{F} = \{f\}$ называется *локально равностепенно непрерывным*, если для любого компакта $K \Subset D$ и любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta = \delta(K, \varepsilon)$ такое, что

$$|f(z') - f(z'')| < \varepsilon \quad \text{для всех } z', z'' \in K \text{ с } |z' - z''| < \delta \\ \text{и всех } f \in \mathcal{F}.$$

ТЕОРЕМА 16.1. *Если семейство функций $\mathcal{F} = \{f\}$, голоморфных в области D , локально равномерно ограничено, то оно и локально равностепенно непрерывно.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $K \Subset D$. Положим

$$\rho := \frac{1}{2} \operatorname{dist}(K, \partial D) = \frac{1}{2} \inf\{|z - \zeta| : z \in K, \zeta \in \partial D\}$$

(если $D = \mathbb{C}$, то за ρ можно взять любое положительное число). Рассмотрим ρ -раздутье компакта K , определяемое как

$$K_\rho := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{dist}(z, K) \leq \rho\}.$$

Очевидно, K_ρ есть снова компакт в D (см. рис. 59). Поэтому по условию теоремы найдется константа $A = A(K_\rho)$ такая, что

$$|f(z)| \leq A \quad \text{для всех } z \in K_\rho \text{ и всех } f \in \mathcal{F}.$$

Пусть z_0 — произвольная точка из K . Тогда круг

$$B_\rho(z_0) := \{|z - z_0| < \rho\}$$

компактно содержится в K_ρ и для всех $z \in B_\rho(z_0)$ и всех $f \in \mathcal{F}$ справедливо неравенство

$$|f(z) - f(z_0)| \leq |f(z)| + |f(z_0)| \leq 2A.$$

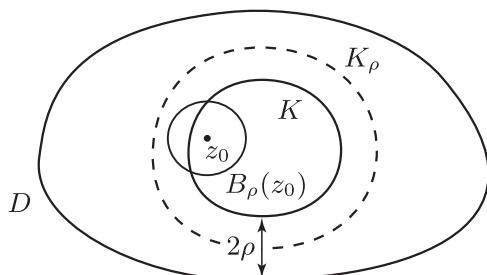


Рис. 59

Рассмотрим отображение круга $B_\rho(z_0)$ на единичный круг $U = \{|\zeta| < 1\}$, задаваемое формулой

$$\zeta: z \mapsto \zeta(z) = \frac{z - z_0}{\rho},$$

и введем функцию

$$g(\zeta) := \frac{f(z_0 + \rho\zeta) - f(z_0)}{2A}.$$

Она голоморфна в круге U и удовлетворяет условию леммы Шварца:

$$g(0) = 0 \quad \text{и} \quad |g(\zeta)| \leq 1.$$

Поэтому по этой лемме

$$|g(\zeta)| \leq |\zeta| \quad \text{при всех} \quad \zeta \in U,$$

откуда

$$|f(z) - f(z_0)| \leq \frac{2A}{\rho} |z - z_0| \quad \text{для всех} \quad z \in B_\rho(z_0). \quad (16.1)$$

Положим теперь для любых $\varepsilon > 0$ и $K \Subset D$

$$\delta = \delta(\varepsilon, K) = \min \left\{ \frac{\varepsilon \rho}{2A}, \rho \right\}.$$

Тогда ввиду произвольности $z_0 \in K$ из неравенства (16.1) вытекает, что

$$\begin{aligned} |f(z') - f(z'')| &< \varepsilon \quad \text{для всех} \quad f \in \mathcal{F} \\ &\quad \text{и всех} \quad z', z'' \in K \quad \text{с} \quad |z' - z''| < \delta, \end{aligned}$$

т.е. семейство $\mathcal{F}$ локально равномерно непрерывно. ■

16.2. Теорема Монтеля.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Семейство функций $\mathcal{F} = \{f\}$, голоморфных в области D , называется *компактным в D* , если из любой последовательности $\{f_n\}$ функций этого семейства можно извлечь подпоследовательность, сходящуюся в топологии $\mathcal{O}(D)$. Семейство $\mathcal{F}$ называется *компактным в себе*, если предел любой такой последовательности снова принадлежит $\mathcal{F}$.

ТЕОРЕМА МОНТЕЛЯ. Если семейство функций $\mathcal{F} = \{f\}$, голоморфных в области D , локально равномерно ограничено, то оно компактно в D .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Шаг 1. Если последовательность $\{f_n\}$ функций из семейства $\mathcal{F}$ сходится в каждой точке всюду плотного подмножества $E \subset D$, то она сходится и в топологии $\mathcal{O}(D)$.

Действительно, пусть заданы $\varepsilon > 0$ и компакт $K \Subset D$. Определим ρ как в доказательстве теоремы 16.1 и рассмотрим ρ -раздутие K_ρ компакта K . По теореме 16.1 последовательность $\{f_n\}$ локально равномерно непрерывна в D . Поэтому найдется $\delta = \delta(\frac{\varepsilon}{3}, K_\rho)$ такое, что

$$|f_n(z') - f_n(z'')| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{для всех } z', z'' \in K_\rho \text{ с } |z' - z''| < \delta \\ \text{и всех } n \in \mathbb{N}.$$

Рассмотрим покрытие компакта K кругами радиуса

$$r = \min \left\{ \frac{\delta}{2}, \rho \right\}$$

с центрами в точках из K и выберем из него конечное подпокрытие

$$\{U_j : j = 1, \dots, M\}.$$

Все круги U_j содержатся в K_ρ , и при каждом j справедливо неравенство

$$|f_n(z') - f_n(z'')| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{для всех } z', z'' \in U_j \text{ и всех } n \in \mathbb{N}. \quad (16.2)$$

Выберем в каждом круге U_j ($j = 1, \dots, M$) точку $z_j \in E$, пользуясь всюду плотностью множества E в D . Так как последовательность f_n сходится в каждой точке E , то найдется N такое, что

$$|f_n(z_j) - f_m(z_j)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{при всех } n, m \geq N \quad \text{и всех } j = 1, \dots, M. \quad (16.3)$$

Пусть теперь z — произвольная точка компакта K . Тогда найдется круг U_j , содержащий эту точку, поэтому при всех $n, m \geq N$ в силу неравенств (16.2), (16.3) будет выполняться оценка

$$\begin{aligned} |f_n(z) - f_m(z)| &\leq |f_n(z) - f_n(z_j)| + |f_n(z_j) - f_m(z_j)| \\ &\quad + |f_m(z_j) - f_m(z)| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Следовательно, по критерию Коши последовательность $\{f_n\}$ сходится равномерно на K , а значит, ввиду произвольности K , и в топологии $\mathcal{O}(D)$.

Шаг 2. Найдется счетное всюду плотное подмножество $E \subset D$ такое, что из любой локально равномерно ограниченной последовательности $\{f_n\}$ функций из семейства $\mathcal{F}$ можно извлечь подпоследовательность, сходящуюся в каждой точке E .

Действительно, выберем в качестве E множество

$$E := \{z = x + iy \in D : x, y \text{ рациональны}\}.$$

Это счетное всюду плотное подмножество в D , точки которого можно занумеровать:

$$E = \{z_1, z_2, \dots, z_k, \dots\}.$$

Выбор подпоследовательности, сходящейся в каждой точке $z_j \in E$, производится с помощью канторовского диагонального процесса.

Сначала ввиду ограниченности числовой последовательности $\{f_n(z_1)\}$ выберем подпоследовательность функций

$$f_{k1} := f_{n_k}, \quad \text{которая сходится в точке } z_1.$$

Затем, пользуясь ограниченностью числовой последовательности $\{f_{n1}(z_2)\}$, выберем подпоследовательность

$$f_{k2} := f_{n_{k1}}, \quad \text{которая сходится в точке } z_2$$

(а также, по построению, в точке z_1). Продолжим процесс построения функций f_{kl} , $l = 1, 2, \dots$, по индукции и выберем диагональную подпоследовательность

$$f_{11}, f_{22}, \dots, f_{kk}, \dots$$

Она сходится в точке z_k для любого фиксированного $k \in \mathbb{N}$, поскольку все ее члены, начиная с k -го, выбраны из последовательности $\{f_{nk}\}$, сходящейся в точках $z_1, \dots, z_k$. ■

Задачи. (1) Пусть функция $f(z)$ голоморфна и ограничена в полосу $\{a < \operatorname{Im} z < b\}$, причем для некоторого $y_0 \in (a, b)$ существует предел

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x + iy_0) =: A.$$

Докажите, что тогда для всех $y \in (a, b)$ существует предел

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x + iy), \quad \text{равный } A.$$

Указание: теорема Монтеля применима к любой последовательности $f_n(z) = f(z + x_n)$ с $x_n \rightarrow +\infty$.

(2) Покажите на примере функции $f(z) = \exp(e^{-z})$, что утверждение предыдущей задачи теряет силу для неограниченных функций f .

16.3. Непрерывные функционалы на семействах голоморфных функций.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть $\mathcal{F} = \{f\}$ — семейство функций, голоморфных в области D . Функционал

$$J: \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{C}, \quad f \mapsto J(f) \in \mathbb{C},$$

называется *непрерывным на семействе $\mathcal{F}$* , если для любой последовательности $\{f_n\}$ функций из $\mathcal{F}$, сходящейся в топологии $\mathcal{O}(D)$ к функции $f \in \mathcal{F}$, справедливо соотношение

$$J(f_n) \rightarrow J(f).$$

ПРИМЕР. Пусть $\mathcal{F} = \mathcal{O}(D)$. Фиксируем точку $a \in D$ и натуральное число $p \in \mathbb{N}$ и рассмотрим функционал

$$J(f) = f^{(p)}(a),$$

сопоставляющий каждой функции $f \in \mathcal{F}$ ее p -ю производную в точке a . Этот функционал непрерывен на $\mathcal{O}(D)$, так как для

всякой последовательности $f_n \in \mathcal{O}(D)$, сходящейся к f в топологии $\mathcal{O}(D)$,

$$f_n^{(p)}(a) \rightarrow f^{(p)}(a)$$

по теореме Вейерштрасса (п. 6.14).

ЛЕММА. *Если функционал J непрерывен на компактном в себе семействе функций $\mathcal{F}$, голоморфных в области D , то $|J|$ ограничен на $\mathcal{F}$ и достигает своей верхней грани, т.е. найдется функция $f_0 \in \mathcal{F}$ такая, что*

$$|J(f)| \leq |J(f_0)| \quad \text{для всех } f \in \mathcal{F}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим

$$A := \sup_{f \in \mathcal{F}} |J(f)|$$

(при этом не предполагается, что $A < \infty$). По определению верхней грани найдется последовательность $f_n \in \mathcal{F}$ такая, что

$$|J(f_n)| \rightarrow A \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

Так как семейство $\mathcal{F}$ компактно в себе, то найдется подпоследовательность f_{n_k} , сходящаяся в топологии $\mathcal{O}(D)$ к некоторой функции $f_0 \in \mathcal{F}$. Тогда в силу непрерывности J

$$|J(f_{n_k})| \rightarrow |J(f_0)| \quad \text{при } k \rightarrow \infty.$$

Из двух полученных предельных соотношений следует, что $A = |J(f_0)|$. В частности, $A < \infty$ и функционал $|J|$ достигает своей верхней грани A на элементе f_0 . ■

Лекция 17. Теорема Римана

17.1. Автоморфизмы основных областей. Напомним, что конформное и взаимно однозначное отображение $f: D_1 \rightarrow D_2$ области D_1 на область D_2 называется *биголоморфизмом*. Биголоморфизм $\varphi: D \rightarrow D$ области D на себя называется ее *автоморфизмом*.

Отметим два простых общих факта, относящихся к этим понятиям.

1°. Совокупность $\text{Aut } D$ всех автоморфизмов области D образует группу относительно композиции $\varphi_1 \circ \varphi_2$, в которой роль единицы играет тождественное отображение, а обратным элементом к автоморфизму φ является обратное отображение φ^{-1} (оно автоматически голоморфно, см. замечание 14.3 из п. 14.2).

2°. Если $f_0: D_1 \rightarrow D_2$ — произвольный биголоморфизм, то любой биголоморфизм $f: D_1 \rightarrow D_2$ записывается в виде

$$f = \varphi_2 \circ f_0 = f_0 \circ \varphi_1,$$

где $\varphi_1 \in \text{Aut } D_1$, $\varphi_2 \in \text{Aut } D_2$ — некоторые автоморфизмы.

Обратимся теперь к описанию групп автоморфизмов и начнем с областей, которые будут называться *основными*. К таковым мы будем относить расширенную комплексную плоскость $\overline{\mathbb{C}}$, комплексную плоскость $\mathbb{C}$ и единичный круг $U = \{|z| < 1\}$. Группы дробно-линейных автоморфизмов этих областей были описаны в лекции 3. Следующая теорема показывает, что, на самом деле, все их автоморфизмы дробно-линейны, т.е. результаты лекции 3 дают описание групп всех автоморфизмов основных областей.

ТЕОРЕМА 17.1. *Любой автоморфизм основной области дробно-линеен.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО разбивается на три случая.

Случай I: *расширенная комплексная плоскость $\overline{\mathbb{C}}$.* Пусть автоморфизм $\varphi: \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ переводит некоторую точку $z_0 \in \overline{\mathbb{C}}$ в $\infty \in \overline{\mathbb{C}}$ (в частности, z_0 может совпадать с ∞). Тогда функция $\varphi: \overline{\mathbb{C}} \setminus \{z_0\} \rightarrow \mathbb{C}$ голоморфна и имеет полюс в точке z_0 (по определению из п. 7.5). Покажем, что это полюс 1-го порядка. Действительно, функция $1/\varphi$ голоморфна в окрестности z_0 и имеет в этой точке нуль. Порядок этого нуля должен быть равен 1, поскольку иначе (по критерию локальной однолиственности из п. 14.2) функция $1/\varphi$, а вместе с ней и φ , была бы неоднолистной в проколотой

окрестности z_0 . Тем самым, $1/\varphi$ имеет в точке z_0 нуль 1-го порядка, а функция φ имеет z_0 своим полюсом 1-го порядка. Согласно описанию функций, мероморфных на $\overline{\mathbb{C}}$ (п. 7.11), это означает, что функция φ имеет вид

$$\varphi(z) = \begin{cases} \frac{a}{z - z_0} + b, & \text{если } z_0 \neq \infty, \\ az + b, & \text{если } z_0 = \infty, \end{cases}$$

для некоторых констант $a, b \in \mathbb{C}$.

Случай II: комплексная плоскость $\mathbb{C}$. Чтобы свести этот случай к предыдущему, достаточно показать, что любой автоморфизм $\varphi: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ можно продолжить до автоморфизма $\overline{\varphi}: \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$, полагая $\overline{\varphi}(\infty) = \infty$.

Проверим сначала непрерывность такого продолжения в точке ∞ , т.е. покажем, что $\varphi(z_n) \rightarrow \infty$ для всякой последовательности $z_n \rightarrow \infty$.

Действительно, если бы последовательность $\{\varphi(z_n)\}$ не сходилась к ∞ , то она содержала бы ограниченную подпоследовательность, из которой, в свою очередь, можно было бы выбрать подпоследовательность, сходящуюся к некоторой точке $w_0 \in \mathbb{C}$. Но в этом случае обратное отображение $\varphi^{-1}: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ было бы разрывно в точке w_0 .

Итак, отображение $\overline{\varphi}$ непрерывно в точке ∞ . Отсюда вытекает, что функция $1/\varphi$, голоморфная в проколотой окрестности бесконечности, имеет в ∞ устранимую особенность (для того чтобы убедиться в этом, достаточно применить критерий из п. 7.6 к функции $\psi(\zeta) = 1/\varphi(1/\zeta)$ в точке $\zeta = 0$). По определению голоморфности отображений расширенной комплексной плоскости (см. п. 2.6) это означает, что функция $\overline{\varphi}$ голоморфна в точке ∞ . Применяя те же рассуждения к обратному отображению $\varphi^{-1}: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, продолжим его также до голоморфного отображения $\overline{\varphi^{-1}}: \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$. Так как это отображение является обратным к $\overline{\varphi}$ на $\mathbb{C}$, это означает, что $\overline{\varphi}$ есть биголоморфизм $\overline{\mathbb{C}}$, переводящий ∞ в ∞ . Как доказано в случае I, такой автоморфизм линейен, т.е. $\varphi(z) = az + b$ для некоторых $a, b \in \mathbb{C}$.

Случай III: единичный круг U . Пусть $\varphi: U \rightarrow U$ — произвольный автоморфизм единичного круга, который переводит начало $0 \in U$ в некоторую точку w_0 . Рассмотрим дробно-линейный авто-

морфизм круга U

$$\zeta = \lambda(w) = \frac{w - w_0}{1 - \overline{w_0}w},$$

который переводит точку w_0 в 0 (см. п. 3.7). Тогда композиция

$$f := \lambda \circ \varphi: U \rightarrow U$$

будет автоморфизмом U , оставляющим точку 0 на месте. Поскольку $|f(z)| < 1$ при $z \in U$, то, применяя к f лемму Шварца, получим, что

$$|f(z)| \leq |z| \quad \text{при всех } z \in U.$$

Снова применяя лемму Шварца, на этот раз к автоморфизму $z = f^{-1}(\zeta)$, будем иметь

$$|f^{-1}(\zeta)| \leq |\zeta| \quad \text{при всех } \zeta \in U.$$

Подставляя в это неравенство $\zeta = f(z)$, получим, что

$$|z| \leq |f(z)| \quad \text{при всех } z \in U.$$

Из двух полученных неравенств вытекает, что

$$|f(z)| \equiv |z|.$$

Следовательно, опять по лемме Шварца (случай равенства)

$$f(z) = e^{i\theta} z \quad \text{для некоторой константы } \theta \in \mathbb{R}.$$

Окончательно,

$$\varphi(z) = \lambda^{-1} \circ f(z) = \lambda^{-1}(e^{i\theta} z),$$

т.е. отображение φ дробно-линейно.

Вспоминая описание групп дробно-линейных автоморфизмов основных областей из п. 3.7, получаем следующее описание групп их автоморфизмов:

$$\text{Aut } \overline{\mathbb{C}} = \left\{ z \mapsto \frac{az + b}{cz + d}, \text{ где } a, b, c, d \in \mathbb{C}, ad - bc \neq 0 \right\},$$

$$\text{Aut } \mathbb{C} = \left\{ z \mapsto az + b, \text{ где } a, b \in \mathbb{C}, a \neq 0 \right\},$$

$$\text{Aut } U = \left\{ z \mapsto e^{i\theta} \frac{z - a}{1 - \overline{a}z}, \text{ где } a \in \mathbb{C}, \theta \in \mathbb{R}, |a| < 1 \right\}.$$

Заметим, что группа $\text{Aut } \overline{\mathbb{C}}$ зависит от трех комплексных параметров (числитель и знаменатель можно поделить на комплексное число), т.е. имеет вещественную размерность 6; группа $\text{Aut } \mathbb{C}$ зависит от двух комплексных параметров и имеет вещественную размерность 4; группа $\text{Aut } U$ зависит от одного комплексного и одного вещественного параметра и имеет вещественную размерность 3. Это указывает на то, что группы автоморфизмов основных областей не изоморфны, а сами основные области не биголоморфны друг другу. Докажем последнее утверждение непосредственно.

ТЕОРЕМА 17.2. *Основные области не биголоморфны между собой.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Расширенная комплексная плоскость $\overline{\mathbb{C}}$ даже не гомеоморфна $\mathbb{C}$ и U , поскольку она компактна, в отличие от $\mathbb{C}$ и U . Комплексная плоскость $\mathbb{C}$ не биголоморфна единичному кругу U , поскольку биголоморфное отображение $f: \mathbb{C} \rightarrow U$ должно было бы задаваться ограниченной целой функцией, а все такие функции по теореме Лиувилля являются константами. ■

Стоит отметить, что основные области, рассматриваемые как подмножества расширенной комплексной плоскости $\overline{\mathbb{C}}$, и топологически различны — граница $\overline{\mathbb{C}}$ пуста, граница $\mathbb{C}$ состоит из одной точки, а граница U совпадает с окружностью (т.е. одномерным континуумом). Все эти области односвязны.

В следующем пункте мы докажем одну из основных теорем курса — теорему Римана, утверждающую, что всякая односвязная область в $\overline{\mathbb{C}}$ биголоморфна одной из основных областей. Отсюда будет следовать, с учетом теоремы 17.2, что в $\overline{\mathbb{C}}$ имеется всего *три* класса биголоморфной эквивалентности односвязных областей — по числу основных областей.

17.2. Теорема Римана.

ТЕОРЕМА РИМАНА. *Любая односвязная область $D \subset \mathbb{C}$, граница которой содержит более одной точки, биголоморфна единичному кругу U .*

Доказательство теоремы проводится в три шага.

Шаг 1. *В D найдется голоморфная однолистная функция, по модулю ограниченная единицей.* Действительно, по условию гра-

ница ∂D содержит две различные точки α, β . Рассмотрим аналитическую функцию

$$\sqrt{\frac{z - \alpha}{z - \beta}}$$

в D , которая задается, как обычно, выбором канонического элемента в какой-либо точке $z_0 \in D$ и его аналитическим продолжением вдоль всевозможных путей в D . Так как область D односвязна, то по теореме о монодромии в ней выделяются две голоморфные однозначные ветви указанной аналитической функции, отличающиеся друг от друга знаком. Обозначим эти ветви через φ_1 и φ_2 .

Заметим, что функции φ_1, φ_2 однолиственны в D . Действительно, из равенства

$$\varphi_j(z_1) = \varphi_j(z_2), \quad j = 1, 2,$$

возведением в квадрат получаем

$$\frac{z_1 - \alpha}{z_1 - \beta} = \frac{z_2 - \alpha}{z_2 - \beta},$$

откуда $z_1 = z_2$ в силу однолиственности дробно-линейных отображений.

Введем обозначение

$$D_1^* := \varphi_1(D), \quad D_2^* := \varphi_2(D).$$

Множества D_1^* и D_2^* не пересекаются. Действительно, если бы

$$\varphi_1(z_1) = \varphi_2(z_2) \quad \text{для некоторых } z_1, z_2 \in D,$$

то возведение в квадрат давало бы, как и выше, что

$$z_1 = z_2 =: z \in D.$$

Поскольку $\varphi_2(z) = -\varphi_1(z)$ по построению, отсюда следовало бы, что

$$\varphi_1(z) = \varphi_2(z) = 0.$$

Последнее невозможно, ибо φ_1, φ_2 не имеют нулей в D .

По принципу сохранения области, D_2^* содержит некоторый круг

$$U^* = \{w \in \mathbb{C} : |w - w_0| < r^*\}.$$

Тогда по доказанному φ_1 не принимает значений из U^* . Введем функцию

$$\varphi_0(z) := \frac{r^*}{\varphi_1(z) - w_0}, \quad z \in D.$$

Она голоморфна и однолистка в D и ограничена по модулю единицей. Тем самым, эта функция является решением задачи, поставленной в шаге 1.

Шаг 2. Обозначим через $\mathcal{F}$ семейство всех голоморфных и однолистных в D функций, ограниченных по модулю единицей. Оно непусто и компактно (по теореме Монтеля из п. 16.2), однако предел последовательности функций из $\mathcal{F}$ может оказаться константой. Чтобы избежать этого, введем подсемейство $\mathcal{F}_a \subset \mathcal{F}$, состоящее из всех функций $f \in \mathcal{F}$ таких, что

$$|f'(a)| \geq |\varphi'_0(a)| \quad \text{в некоторой фиксированной точке } a \in D.$$

Заметим, что $|\varphi'_0(a)| > 0$ в силу однолистности φ_0 . Семейство $\mathcal{F}_a$ по-прежнему компактно в силу теоремы Монтеля. Более того, оно компактно в себе, поскольку предел f_0 любой последовательности $f_n \in \mathcal{F}_a$, сходящейся в топологии $\mathcal{O}(D)$, есть функция, голоморфная в D и удовлетворяющая неравенству

$$|f'(a)| \geq |\varphi'_0(a)| > 0,$$

откуда $f_0 \not\equiv \text{const}$ и, значит, по следствию из теоремы Гурвица (п. 14.3) функция f_0 однолистка в D и потому $f_0 \in \mathcal{F}_a$.

Рассмотрим функционал $J: \mathcal{F}_a \rightarrow \mathbb{C}$, задаваемый формулой

$$J(f) := f'(a).$$

Согласно п. 16.3 он непрерывен на $\mathcal{F}_a$ и (по лемме из п. 16.3) достигает на $\mathcal{F}_a$ своей верхней грани, т.е. найдется функция $f_0 \in \mathcal{F}_a$ такая, что

$$|f'(a)| \leq |f'_0(a)| \quad \text{для всех } f \in \mathcal{F}_a.$$

Шаг 3. По определению семейства $\mathcal{F}_a$ функция f_0 конформно отображает область D внутрь единичного круга U . Для завершения доказательства остается установить, что образ D при этом отображении совпадает со всем кругом U .

Будем пользоваться следующим легко проверяемым свойством автоморфизмов круга:

$$\text{если } \psi_c(z) := \frac{z - c}{1 - \bar{c}z}, \quad \text{то } \psi'_c(0) = 1 - |c|^2 \quad \text{и} \quad \psi'_c(c) = \frac{1}{1 - |c|^2}. \quad (17.1)$$

Покажем сначала, что $f_0(a) = 0$. Действительно, допустим, напротив, что $f_0(a) =: c$ отлично от нуля. Тогда функция

$$g(z) := (\psi_c \circ f_0)(z) = \frac{f_0(z) - c}{1 - \bar{c}f_0(z)}$$

принадлежит $\mathcal{F}_a$, но из формулы (17.1) следует, что

$$|g'(a)| = |\psi'_c(c)| |f'_0(a)| = \frac{|f'_0(a)|}{1 - |c|^2}$$

строго больше $|f'_0(a)|$, вопреки определению f_0 .

Покажем теперь, что f_0 отображает область D на единичный круг U , т.е. все значения $b \in U \setminus \{0\}$ принадлежат $f_0(D)$.

Действительно, допустим, напротив, что значение $b \in U \setminus \{0\}$ не принимается f_0 . Рассмотрим тогда функцию

$$h(z) := \sqrt{\psi_b \circ f_0(z)} = \sqrt{\frac{f_0(z) - b}{1 - \bar{b}f_0(z)}}, \quad z \in D,$$

задаваемую однозначной голоморфной ветвью указанного корня в D (которую можно выделить по теореме о монодромии из п. 10.6). Так же как в шаге 1, проверяется, что функция h однолистка в D , т.е. $h \in \mathcal{F}$. В силу формулы (17.1) производная функции $h(z)^2$ в точке a равна $f'_0(a)(1 - |b|^2)$. Поэтому

$$|h'(a)| = \frac{|f'_0(a)|(1 - |b|^2)|}{2|h(a)|} = \frac{1 - |b|^2}{2\sqrt{|b|}} |f'_0(a)|.$$

Как мы видели выше, это значение можно увеличить, рассмотрев вместо h функцию

$$h_0 := \psi_c \circ h, \quad \text{где } c = h(a).$$

А именно $h_0 \in \mathcal{F}$ и

$$|h'_0(a)| = \frac{|h'(a)|}{1 - |h(a)|^2} = \frac{(1 - |b|^2)|f'_0(a)|}{2\sqrt{|b|}(1 - |b|)} = \frac{1 + |b|}{2\sqrt{|b|}} |f'_0(a)| > |f'_0(a)|,$$

поскольку $|b| < 1$. Но это противоречит экстремальности f_0 в $\mathcal{F}_a$. Таким образом, f_0 осуществляет биголоморфизм $D \rightarrow U$ и теорема Римана доказана.

СЛЕДСТВИЕ. Любые две односвязные области $D \subset \mathbb{C}$, границы которых содержат более одной точки, биголоморфны друг другу.

Задачи. (1) Используемый в доказательстве теоремы Римана класс $\mathcal{F}$ состоял, по определению, из голоморфных функций, ограниченных по модулю единицей. При этом не уточнялось, имеется ли в виду неравенство $|f(z)| < 1$ или $|f(z)| \leq 1$. Покажите в связи с этим, что если $f \in \mathcal{O}(D)$ и $|f(z)| \leq 1$ для всех $z \in D$, то либо $f \equiv \text{const}$, либо $|f(z)| < 1$ для всех $z \in D$.

(2) Пусть область D биголоморфна единичному кругу U . Докажите, что для заданной точки $z_0 \in D$ и вещественного числа θ_0 найдется единственный биголоморфизм $f: D \rightarrow U$ такой, что

$$f(z_0) = 0 \quad \text{и} \quad \arg f'(z_0) = \theta_0.$$

Заметим, что в силу замечаний в начале п. 17.1 совокупность всех биголоморфизмов $D \rightarrow U$ зависит от трех вещественных параметров. Сформулированная задача дает, тем самым, один из способов фиксирования этих параметров.

(3) Поскольку группа $\text{Aut } U$ зависит от трех вещественных параметров, то для любых двух точек $z_1, w_1 \in U$ найдется автоморфизм U , переводящий z_1 в w_1 (докажите это!). По той же причине мы не можем ожидать, что для любых двух пар несовпадающих точек (z_1, z_2) и (w_1, w_2) круга U найдется автоморфизм $\varphi: U \rightarrow U$, переводящий z_1 в w_1 и z_2 в w_2 . Приведите пример пар точек, биголоморфно не эквивалентных друг другу, и найдите условие на пары (z_1, z_2) и (w_1, w_2) , при котором требуемый автоморфизм $\varphi: U \rightarrow U$ все же существует.

Указание: См. задачу (1) п. 3.6.

(4) Докажите, что в условиях теоремы Римана максимальное значение $|f'(a)|$ по всем функциям $f \in \mathcal{O}(D)$, удовлетворяющим условию

$$|f(z)| \leq 1 \quad \text{для всех } z \in D$$

(но не обязательно однолиственным), совпадает с аналогичным значением, вычисленным по всем функциям класса $\mathcal{F}_a$. Покажите, что оно достигается только на скалярных кратных конформного отображения f_0 области D на U , удовлетворяющего условию

$$f_0(a) = 0, \quad \arg f'_0(a) = 0$$

(эти условия однозначно определяют отображение f_0 согласно задаче (2)).

Лекция 18. Соответствие границ и принцип симметрии

18.1. Принцип соответствия границ.

ТЕОРЕМА. Пусть $D_1, D_2 \in \mathbb{C}$ — области с простыми границами, причем граница ∂D_1 связна. Предположим, что функция $f: D_1 \rightarrow D_2$, голоморфная в области D_1 и непрерывная в ее замыкании $\overline{D}_1$, гомеоморфно отображает ∂D_1 на ∂D_2 . Тогда f биголоморфно отображает D_1 на D_2 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Фиксируем произвольную точку w_0 в области D_2 . Так как функция f по условию не принимает значения w_0 на ∂D_1 , то

$$f^{-1}(w_0) := \{z \in D_1 : f(z) = w_0\}$$

есть компактное подмножество области D_1 в силу непрерывности f на $\overline{D}_1$.

Примем следующий топологический факт как наглядно очевидный: если $D \subset \mathbb{C}$ — область с простой связной границей, то для всякого компакта $K \subset D$ найдется область $\tilde{D}$ с простой связной границей такая, что $K \subset \tilde{D} \Subset D$ и кривые $\partial \tilde{D}$, ∂D гомотопны как замкнутые кривые на множестве $\overline{D} \setminus K$.

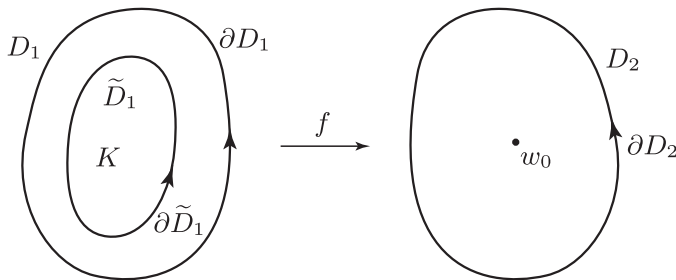


Рис. 60

Применяя это утверждение к компакту $K := f^{-1}(w_0)$ и области $D := D_1$, найдем область $\tilde{D}_1$ с простой связной границей такую, что $K \subset \tilde{D}_1 \Subset D_1$ (см. рис. 60). Пусть N есть число нулей функции $f(z) - w_0$ в области D_1 (а значит, и в $\tilde{D}_1$). По принципу

аргумента (см. п. 13.2) для области $\tilde{D}_1$ получаем, что

$$N = \frac{1}{2\pi} \Delta_{\partial\tilde{D}_1} \arg(f(z) - w_0).$$

В силу гомотопности границ областей $\partial\tilde{D}_1$, ∂D_1 и непрерывности функции f на $\overline{D}_1$ правая часть этого равенства совпадает с $\frac{1}{2\pi} \Delta_{\partial D_1} \arg(f(z) - w_0)$, откуда следует, что

$$N = \frac{1}{2\pi} \Delta_{\partial D_1} \arg(f(z) - w_0). \quad (18.1)$$

(Заметим, что это равенство могло быть получено сразу из принципа аргумента для области D_1 , если бы мы дополнительно предположили, что f голоморфна в окрестности замыкания $\overline{D}_1$.)

Поскольку f биективно отображает ∂D_1 на ∂D_2 , правая часть (18.1) равна

$$\pm \frac{1}{2\pi} \Delta_{\partial D_2} \arg(w - w_0)$$

(знак “минус” перед этим выражением возникает в случае, когда гомеоморфизм $f: \partial D_1 \rightarrow \partial D_2$ обращает ориентацию границы; если f сохраняет ориентацию — нужно ставить знак “плюс”). Снова по принципу аргумента указанное число есть

$$\pm \text{число нулей функции } F(w) = w - w_0 \text{ в } D_2.$$

Последнее число равно ± 1 . Поскольку левая часть (18.1) неотрицательна, в последнем выражении нужно выбрать знак “плюс”, и формула (18.1) принимает вид

$$N = 1.$$

Таким образом, функция f принимает в D_1 каждое значение $w_0 \in D_2$ ровно один раз с учетом кратности.

2) Выбирая точку $w_0 \in \mathbb{C} \setminus \overline{D}_2$ и повторяя для нее предыдущие рассуждения, покажем, что в этом случае $N = 0$, т.е. функция f не принимает в D_1 значений w_0 из дополнения $\mathbb{C} \setminus \overline{D}_2$. Она не может принимать в D_1 и значений $w_0 \in \partial D_2$, поскольку f гомеоморфно отображает ∂D_1 на ∂D_2 .

Таким образом, f осуществляет взаимно однозначное голоморфное отображение D_1 на D_2 , т.е. биголоморфизм D_1 на D_2 (см. замечание 14.3 из п. 14.2). ■

Справедливо следующее “обращение” принципа соответствия границ, не налагающее никаких условий на поведение отображения на границе.

ТЕОРЕМА КАРАТЕОДОРИ. Пусть каждая из областей $D_1, D_2 \in \mathbb{C}$ ограничена конечным числом непересекающихся замкнутых жордановых кривых. Тогда всякий биголоморфизм $f: D_1 \rightarrow D_2$ продолжается до гомеоморфизма замыканий $\overline{D}_1 \rightarrow \overline{D}_2$.

Мы приводим эту теорему без доказательства (которое можно найти в [4]). Заметим, что в формулировке теоремы не требуется, чтобы границы областей были кусочно гладкими.

Принцип соответствия границ, вообще говоря, не выполняется для неограниченных областей, даже с очень хорошими границами (напомним, что все области с простыми границами по определению ограничены). Чтобы продемонстрировать, какие эффекты могут при этом возникать, рассмотрим область $D_1 = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$ и заданную в ней функцию $f(z) = z^3$. Тогда f голоморфна в D_1 и непрерывна (даже голоморфна) в $\overline{D}_1$ (понимая непрерывность и голоморфность в ∞ в смысле, указанном в лекции 2). Кроме того, f гомеоморфно отображает $\mathbb{R} = \partial D_1$ на $\mathbb{R}$. Однако образ $f(D_1)$ в этом случае не является областью с границей $\mathbb{R}$, напротив, $f(D_1) = \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Тем не менее, принцип соответствия границ для отображений $f: D_1 \rightarrow D_2$ неограниченных областей D_1 удастся сохранить, если дополнительно потребовать, чтобы область $D_2 \in \mathbb{C}$ имела простую границу, а область $D_1 \subset \overline{\mathbb{C}}$ была ограничена конечным числом непересекающихся замкнутых жордановых кусочно гладких кривых на расширенной плоскости $\overline{\mathbb{C}}$.

Докажем частный случай этого утверждения, который понадобится нам в следующей лекции. (Применение этого же приема позволяет доказать принцип соответствия и в указанном общем случае.)

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть $D_1 = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$ есть верхняя полуплоскость, а $D_2 \in \mathbb{C}$ — область с простой границей. Предположим, что функция f голоморфна в области D_1 и непрерывна в ее замыкании $\overline{D}_1$ на расширенной комплексной плоскости $\overline{\mathbb{C}}$. Если f гомеоморфно отображает $\partial D_1 \subset \overline{\mathbb{C}}$ на ∂D_2 , то f является биголоморфизмом D_1 на D_2 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что $D_1 = \{\operatorname{Im} z > 0\}$ является биголоморфным образом единичного круга $U = \{|\zeta| < 1\}$ (являющегося областью с простой границей) при дробно-линейном

преобразовании

$$\varphi: U \rightarrow D_1, \quad \zeta \mapsto i \frac{1-\zeta}{1+\zeta}.$$

Сквозное отображение $g := f \circ \varphi$, голоморфное в круге U и непрерывное в его замыкании, удовлетворяет всем условиям принципа соответствия границ. Поэтому оно является биголоморфизмом U на D_2 . Отсюда следует, что и отображение

$$f = g \circ \varphi^{-1}: D_1 = \varphi(U) \rightarrow D_2$$

является биголоморфизмом D_1 на D_2 . ■

Вопрос. Почему нельзя повторить то же самое рассуждение для случая $D_1 = D_2 = \{\operatorname{Im} z > 0\}$, применяя обычный принцип соответствия границ к отображению $g = \varphi^{-1} \circ f \circ \varphi$?

18.2. Принцип симметрии. Прежде, чем переходить к формулировке принципа симметрии, приведем лемму о голоморфном продолжении функций через отрезок, которая является частным случаем одной теоремы Привалова и будет использована нами при доказательстве принципа симметрии.

ЛЕММА О ГОЛОМОРФНОМ ПРОДОЛЖЕНИИ. *Предположим, что прямая l пересекает область $D \subset \mathbb{C}$, а функция $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ голоморфна в $D \setminus l$ и непрерывна в D . Тогда f голоморфна во всей области D .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства голоморфности f в области D достаточно, по теореме Морера, показать, что

$$\int_{\partial \Delta} f(z) dz = 0$$

для любого треугольника $\Delta \Subset D$. Пересечение замкнутого треугольника $\overline{\Delta}$ с прямой l может быть:

- (а) пустым множеством,
- (б) вершиной треугольника,
- (с) стороной треугольника или
- (д) отрезком, соединяющим внутренние точки двух сторон треугольника или одну из его вершин с внутренней точкой противоположной стороны.

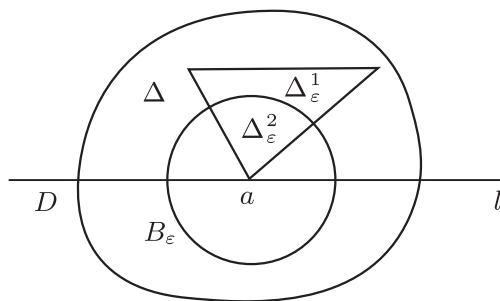


Рис. 61

В случае (а) имеем $\Delta \Subset D \setminus l$, и равенство нулю требуемого интеграла следует из теоремы Коши.

В случае (b) обозначим вершину Δ , лежащую на l , через a , а через B_ε — малый круг $\{|z - a| < \varepsilon\}$ с центром в этой точке (см. рис. 61). Положим

$$\Delta_\varepsilon^1 := \Delta \setminus \overline{B_\varepsilon}, \quad \Delta_\varepsilon^2 := \Delta \cap B_\varepsilon.$$

Тогда интеграл от f по $\partial\Delta$ есть сумма интегралов от f по $\partial\Delta_\varepsilon^1$ и $\partial\Delta_\varepsilon^2$. Первый из них равен нулю, так как $\Delta_\varepsilon^1 \Subset D \setminus l$, а второй стремится к нулю при $\varepsilon \rightarrow 0+$ по стандартной оценке интеграла 5° из п. 4.2:

$$\left| \int_{\partial\Delta_\varepsilon^2} f(z) dz \right| \leq \max_{z \in \overline{\Delta}} |f(z)| \cdot |\partial\Delta_\varepsilon^2| \rightarrow 0$$

при $\varepsilon \rightarrow 0+$. Так как интеграл от f по $\partial\Delta$ не зависит от ε , он должен быть равен нулю.

В случае (с) пусть ab есть сторона Δ , лежащая на l , а P_ε — прямоугольник с основанием ab высоты ε , лежащий в той же полуплоскости с границей l , что и Δ (см. рис. 62). Тогда $\Delta \setminus P_\varepsilon$ можно разложить в объединение (одного или двух) треугольников двух типов — треугольников, компактно содержащихся в $D \setminus l$, и треугольников типа (b), опирающихся одной из вершин на прямую l . С другой стороны, $P_\varepsilon \setminus \Delta$ также состоит из (одного или двух) треугольников указанных типов. Заметим, что интегралы по границам треугольников обоих указанных типов равны нулю по доказанному в случаях (а) и (b), поэтому такие интегралы можно добавлять или убирать из интеграла по $\partial\Delta$. Это рассуж-

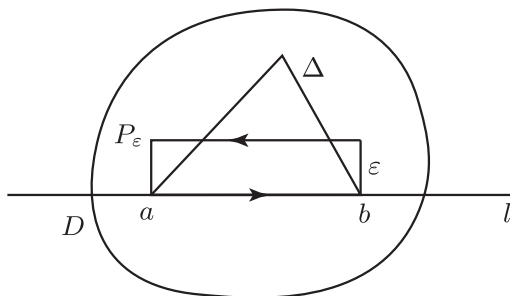


Рис. 62

дение показывает, что

$$\int_{\partial\Delta} f(z) dz = \int_{\partial P_\varepsilon} f(z) dz \quad (18.2)$$

при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$. Оценим теперь интеграл от f по ∂P_ε . Интегралы по сторонам P_ε , перпендикулярным ab , стремятся к нулю при $\varepsilon \rightarrow 0$ по упомянутой выше стандартной оценке. С другой стороны, чтобы оценить суммы интегралов по двум остальным сторонам прямоугольника, предположим, что прямая l совпадает с осью x , а треугольник Δ лежит в верхней полуплоскости (этого всегда можно добиться движением плоскости). Тогда указанная сумма будет равна

$$\int_a^b \{f(x) - f(x + i\varepsilon)\} dx,$$

что не превосходит по модулю

$$|b - a| \max_{a \leq x \leq b} |f(x) - f(x + i\varepsilon)|.$$

Последняя величина стремится к нулю при $\varepsilon \rightarrow 0$ в силу равномерной непрерывности f . (Действительно, рассмотрим любую область $G \Subset D$, содержащую отрезок $[a, b]$. Тогда все прямоугольники P_ε , начиная с некоторого $\varepsilon_0 > 0$, содержатся в G и функция f равномерно непрерывна на $\overline{G}$). Так как левая часть (18.2) не зависит от ε , то она должна быть равна нулю.

Наконец, в случае (d) треугольник Δ разрезается на два или три треугольника типов (b) и (c), откуда снова следует, что интеграл от f по $\partial\Delta$ равен нулю. ■

ПРИНЦИП СИММЕТРИИ. Пусть D_1, D_2 — области в $\overline{\mathbb{C}}$. Допустим, что граница ∂D_1 содержит дугу (т.е. непустое открытое связное подмножество) γ_1 обобщенной окружности l_1 , а граница ∂D_2 — дугу γ_2 обобщенной окружности l_2 . Обозначим через D_j^* , $j = 1, 2$, область, симметричную области D_j относительно l_j . Мы будем предполагать, что

$$D_1 \cap D_1^* = \emptyset = D_2 \cap D_2^*,$$

а множества

$$G_1 := D_1 \cup \gamma_1 \cup D_1^* \quad \text{и} \quad G_2 := D_2 \cup \gamma_2 \cup D_2^*$$

являются областями в $\overline{\mathbb{C}}$. Пусть, далее, функция f , голоморфная в области D_1 и непрерывная вплоть до γ_1 , биголоморфно отображает D_1 на D_2 и задает гомеоморфизм γ_1 на γ_2 . Тогда она голоморфно продолжается через γ_1 в область G_1 . Иными словами, существует функция $F \in \mathcal{O}(G_1)$, совпадающая с f на $D_1 \cup \gamma_1$, которая биголоморфно отображает область G_1 на область G_2 . При этом

$$F(z) = f(z^*)^* \quad \text{для} \quad z \in D_1^* \quad (18.3)$$

(в этом равенстве z^* — точка, симметричная $z \in D_1^*$ относительно l_1 , а $f(z^*)^*$ — точка, симметричная $f(z^*) \in D_2$ относительно l_2), см. рис. 63.

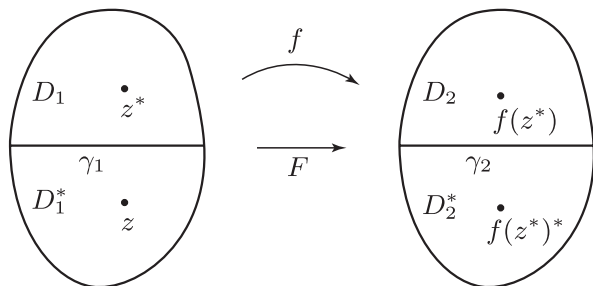


Рис. 63

Формула (18.3) объясняет название “принцип симметрии”: отображение F , задаваемое этой формулой, переводит точки, симметричные относительно l_1 в точки, симметричные относительно l_2 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1°. Пусть сначала $D_1, D_2 \subset \mathbb{C}$, а дуги γ_1, γ_2 являются отрезками вещественной оси (т.е. $l_1 = l_2 = \mathbb{R}$). Положим

$$F(z) := \begin{cases} f(z), & z \in D_1 \cup \gamma_1, \\ \overline{f(\bar{z})}, & z \in D_1^*. \end{cases}$$

Функция $F(z)$ непрерывна на G_1 , так как в любой точке $a \in \gamma_1$ пределы $F(z)$ при $z \rightarrow a$ сверху и снизу совпадают в силу условия $f(\gamma_1) \subset \gamma_2 \subset \mathbb{R}$. Кроме того, она голоморфна на $G_1 \setminus \mathbb{R} = D_1 \cup D_1^*$. Действительно, нужно проверять это только в точках $a \in D_1^*$. Разлагая функцию f в ряд Тейлора с центром в симметричной точке $\bar{a} \in D_1$, получим разложение в ряд Тейлора функции

$$F(z) = \overline{f(\bar{z})} = \overline{\sum_{n=0}^{\infty} c_n(\bar{z} - \bar{a})^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{c}_n(z - a)^n$$

в соответствующей окрестности точки a .

Следовательно, функция F удовлетворяет условиям леммы о голоморфном продолжении в области G_1 , из которой вытекает, что F голоморфна во всей области G_1 . Далее, из определения F следует, что F биективно отображает D_1^* на D_2^* . Так как отображение $f: \gamma_1 \rightarrow \gamma_2$ является гомеоморфизмом и $D_1 \cap D_1^* = \emptyset = D_2 \cap D_2^*$, отсюда следует, что F биективно отображает G_1 на G_2 . Согласно замечанию 14.3 из п. 14.2 это означает, что F есть биголоморфизм G_1 на G_2 .

2°. В общем случае рассмотрим дробно-линейные преобразования $\lambda_j: \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$, переводящие дуги $\gamma_j \subset l_j$ в отрезки $\lambda_j(\gamma_j)$ вещественной оси $\mathbb{R}$ ($j = 1, 2$), см. рис. 64. По свойству сохранения симметрии при дробно-линейных преобразованиях (п. 3.5) пары симметричных областей D_1, D_1^* и D_2, D_2^* переходят в пары областей $\lambda_1(D_1), \lambda_1(D_1^*)$ и $\lambda_2(D_2), \lambda_2(D_2^*)$, симметричных относительно вещественной оси и не содержащих точку ∞ (иначе пересечение $D_1 \cap D_1^*$ или $D_2 \cap D_2^*$ было бы непусто). Функция

$$\tilde{f} := \lambda_2 \circ f \circ \lambda_1^{-1}$$

биголоморфно отображает область $\lambda_1(D_1) \subset \mathbb{C}$ на область $\lambda_2(D_2) \subset \mathbb{C}$ и непрерывно продолжается до гомоморфизма отрезка $\lambda_1(\gamma_1) \subset \mathbb{R}$ на отрезок $\lambda_2(\gamma_2) \subset \mathbb{R}$. Согласно случаю 1° функция $\tilde{f}$ аналитически продолжается до биголоморфизма $\tilde{F}$

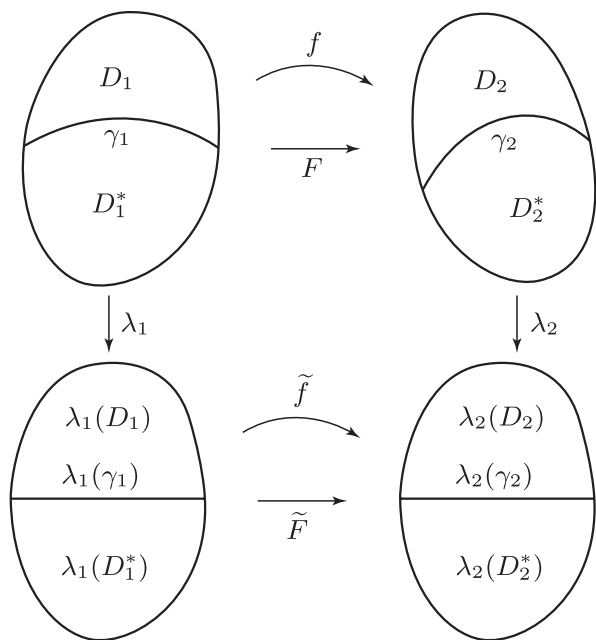


Рис. 64

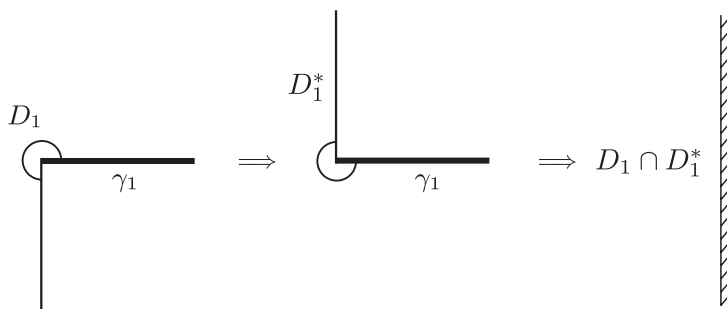


Рис. 65

области $\lambda_1(G_1)$ на $\lambda_2(G_2)$. При этом, поскольку λ_1 и λ_2 сохраняют симметрию, отображение

$$F := \lambda_2^{-1} \circ \tilde{F} \circ \lambda_1$$

есть биголоморфизм G_1 на G_2 , обладающий указанными в теореме свойствами. $\blacksquare$

ЗАМЕЧАНИЕ 18.1. Значительная часть доказательства использует только голоморфность, но не биективность f . Пользуясь этим, можно получить следующий вариант принципа симметрии, дающий еще один метод аналитического продолжения голоморфных функций.

УТВЕРЖДЕНИЕ. Пусть $D_1 \subset \overline{\mathbb{C}}$ — область, граница которой содержит дугу γ_1 обобщенной окружности l_1 . Обозначим через D_1^* область, симметричную D_1 относительно l_1 . Предположим, что

$$D_1 \cap D_1^* = \emptyset,$$

а множество $G_1 := D_1 \cup \gamma_1 \cup D_1^*$ является областью в $\overline{\mathbb{C}}$. Пусть $\overline{\mathbb{C}}$ -значная функция f , голоморфная в D_1 и непрерывная в $D_1 \cup \gamma_1$, отображает дугу γ_1 на подмножество некоторой обобщенной окружности $l_2 \subset \overline{\mathbb{C}}$. Тогда существует $\overline{\mathbb{C}}$ -значная функция F , голоморфная в области G_1 , которая совпадает с f на $D_1 \cup \gamma_1$. При этом

$$F(z) = f(z^*)^* \quad \text{для } z \in D_1^*$$

(в этом равенстве первая $*$ означает симметрию относительно l_1 , а вторая — относительно l_2).

ЗАМЕЧАНИЕ 18.2. Если множество $D_1 \cap D_1^*$ непусто, то функции $f(z)$ и $f(z^*)^*$ не обязаны на нем совпадать. Возьмем, например,

$$D_1 = \left\{ z \in \mathbb{C} : 0 < \arg z < \frac{3\pi}{2} \right\} \quad \text{с } \gamma_1 = [0, +\infty)$$

и $f(z) = \sqrt{z}$ (мы выбираем ветвь, удовлетворяющую условию $\sqrt{1} = 1$), см. рис. 65. Тогда $f(z^*)^*$ есть вторая ветвь $\sqrt{z}$ на области

$$D_1 \cap D_1^* = \{\operatorname{Re} z < 0\}$$

и $f(z) \neq f(z^*)^*$ на $D_1 \cap D_1^*$. Если мы все же попытаемся применить конструкцию принципа симметрии в ситуации, когда имеются непустые пересечения областей и их симметричных образов, то она приведет к аналитической функции, поднимающейся до конформного отображения областей на соответствующих римановых поверхностях. Это еще одна конструкция в комплексном анализе, которая, наряду с локальным обращением голоморфных функций, неизбежно приводит к многозначным аналитическим функциям.

ЗАМЕЧАНИЕ 18.3. В формулировке принципа симметрии мы потребовали, чтобы множества

$$D_1 \cup \gamma_1 \cup D_1^* \quad \text{и} \quad D_2 \cup \gamma_2 \cup D_2^*$$

были областями. Это условие эквивалентно тому, что каждая точка $z_0 \in \gamma_j$ ($j = 1, 2$) включается в $D_j \cup \gamma_j \cup D_j^*$ вместе с некоторой окрестностью. Данное требование необходимо для применимости леммы о голоморфном продолжении, и оно не вытекает из остальных условий. Убедиться в этом можно, рассмотрев следующий пример (см. рис. 66):

$$D_1 = \{\operatorname{Im} z > 0\} \setminus \{z = iy : 0 < y \leq 1\}, \quad \gamma_1 = \mathbb{R}, \quad z_0 = 0.$$

Впрочем, можно избежать подобных ситуаций, если потребовать дополнительно, чтобы D_1 и D_2 были областями с простой границей.

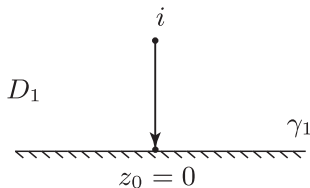


Рис. 66

Задачи. (1) Модулем концентрического кольца $\{r < |z - a| < R\}$ называется отношение R/r . Пользуясь теоремой Каратеодори (см. п. 18.1) и принципом симметрии, покажите, что два концентрических кольца биголоморфны $\iff$ их модули равны. Покажите, что группа автоморфизмов такого кольца зависит от одного вещественного

параметра (а именно порождается поворотами $z \mapsto a + e^{i\theta}(z - a)$ и отображением $z \mapsto rR/z$). Сравните это с описанием групп автоморфизмов односвязных областей в п. 17.1.

(2) Покажите, что прямоугольник, отличный от квадрата, нельзя конформно отобразить на квадрат так, чтобы вершины перешли в вершины.

(3) Пусть $U = \{|z| < 1\}$ и $\gamma \subset \partial U$ — дуга единичной окружности. Предположим, что функция $f \in \mathcal{O}(U) \cap C(U \cup \gamma)$ равна нулю всюду на γ . Докажите, что $f \equiv 0$.

(4) *Принцип Шварца*. Пусть граница области $D_1 \subset \mathbb{C}$ есть жорданова кривая, содержащая аналитическую дугу γ_1 (т.е. образ открытого единичного отрезка $(0, 1) \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ при конформном отображении некоторой окрестности этого отрезка в $\mathbb{C}$), а граница области $D_2 \subset \mathbb{C}$ также жорданова и содержит аналитическую дугу γ_2 . Покажите, что всякое биголоморфное отображение $f: D_1 \rightarrow D_2$, непрерывно продолжающееся до гомеоморфизма γ_1 на γ_2 , допускает продолжение до биголоморфизма некоторой области $G_1 \supset D_1 \cup \gamma_1$ на некоторую область $G_2 \supset D_2 \cup \gamma_2$. Пользуясь замечаниями 18.1 и 18.3 выше, сформулируйте и докажите вариант этого утверждения, не требующий биективности f и жордановости границ D_1, D_2 , но и утверждающий всего лишь голоморфную продолжимость f в некоторую область $G \supset D_1 \cup \gamma_1$. Кроме того, пользуясь примерами из замечания 18.2, покажите, что принцип Шварца и принцип симметрии становятся неверными, если в определении аналитической дуги заменить открытый отрезок $(0, 1)$ на замкнутый отрезок $[0, 1]$.

Следующая серия задач относится к теореме единственности для функций, голоморфных в области D , которые принимают чисто мнимые значения на ∂D . Эту теорему можно вывести из принципа симметрии, принципа аргумента или принципа максимума, причем каждый из этих подходов работает при своих ограничениях на область D . Задача (9) продолжает этот результат в другом направлении.

Задачи. (5) Пусть $D = \{|z| < 1\}$, $f \in \mathcal{O}(D) \cap C(\overline{D})$ и $\operatorname{Re} f \equiv 0$ на ∂D . Пользуясь принципом симметрии и теоремой Лиувилля, докажите, что $f \equiv \text{const}$.

(6) Покажите на примере, что утверждение задачи (5) перестает быть верным для функций, вещественная часть которых равна нулю лишь на некоторой непустой открытой дуге $\gamma \subset \partial D$.

(7) Повторяя доказательство равенства (18.1) из п. 18.1, покажите, что принцип аргумента (п. 14.3) остается верен для функций f , голо-

морфных в области D и непрерывных в ее замыкании $\overline{D}$ (иначе говоря, требование голоморфности f в окрестности $\overline{D}$, наложенное в формулировке принципа, является излишним). Пользуясь этим, дайте другое доказательство утверждения задачи (5), считая D произвольной односвязной областью с простой границей.

(8) Применяя принцип максимума к функциям $e^{\pm f(z)}$, дайте еще одно доказательство утверждения задачи (5), считая на этот раз D произвольной ограниченной областью.

(9) Пусть $D = \{|z| < 1\}$, а $P: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ — произвольный полином с вещественными коэффициентами от двух переменных $u, v \in \mathbb{R}$. Покажите, что непостоянная функция $f \in \mathcal{O}(D) \cap C(\overline{D})$, удовлетворяющая $P(\operatorname{Re} f, \operatorname{Im} f) \equiv 0$ на ∂D , существует тогда и только тогда, когда открытое множество $\{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : P(u, v) \neq 0\}$ имеет хотя бы одну ограниченную связную компоненту. Приведите примеры квадратичных полиномов $P(u, v)$, обладающих и не обладающих указанным свойством. (В задачах (5)–(8) рассматривался частный случай $P(u, v) = u$ данной задачи.)

Лекция 19. Конформное отображение полуплоскости на многоугольник

19.1. Конформное отображение полуплоскости на прямоугольник. Обозначим через

$$D_+ = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$$

верхнюю полуплоскость и фиксируем число $0 < k < 1$. *Эллиптический интеграл 1-го рода* задается при $z \in \overline{D}_+ \subset \overline{\mathbb{C}}$ выражением вида

$$F(z) = F(z, k) := \int_0^z \frac{d\zeta}{\sqrt{(1 - \zeta^2)(1 - k^2 \zeta^2)}} = \int_0^z \frac{d\zeta}{\varphi(\zeta)}. \quad (19.1)$$

Для того чтобы формула (19.1) стала корректной, необходимо уточнить смысл входящего в нее корня

$$\sqrt{(1 - \zeta^2)(1 - k^2 \zeta^2)}.$$

Мы рассматриваем его голоморфную ветвь $\varphi(\zeta)$ в односвязной области D , которая получается выбрасыванием из комплексной плоскости $\mathbb{C}$ четырех лучей вида (см. рис. 67)

$$\left\{ z : z = \pm 1 - iy, z = \pm \frac{1}{k} - iy, y \geq 0 \right\}.$$

Указанная ветвь выделяется в D по теореме о монодромии (см. п. 10.6) и однозначно определяется условием $\varphi(0) = 1$.

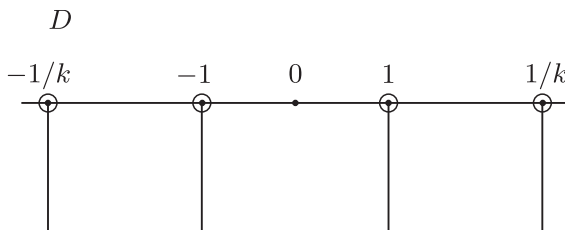


Рис. 67

Интеграл в формуле (19.1) берется по любому кусочно гладкому пути γ в множестве

$$\overline{D}_+ \cap D = \overline{D}_+ \setminus \left\{ \pm 1, \pm \frac{1}{k} \right\},$$

соединяющему начало координат 0 с точкой z (независимость $F(z)$ от выбора пути интегрирования гарантируется теоремой Коши для односвязной области D). В пяти исключительных точках $z = \pm 1, \pm 1/k, \infty$ из замыкания $\overline{D}_+ \subset \overline{\mathbb{C}}$ функция $F(z)$ может быть доопределена как абсолютно сходящийся несобственный интеграл. Например, при $z = 1$

$$F(1) = \int_0^1 \frac{d\xi}{\varphi(\xi)} = \lim_{x \rightarrow 1-} \int_0^x \frac{d\xi}{\varphi(\xi)},$$

где сходимость указанного несобственного интеграла вытекает из оценки

$$|\varphi(\zeta)| \geq C\sqrt{|1-\zeta|} \quad \text{при} \quad |1-\zeta| \leq \delta. \quad (19.2)$$

Аналогично определяются значения $F(z)$ при $z = -1, \pm 1/k$. Для определения $F(z)$ при $z = \infty$ нужно воспользоваться оценкой

$$|\varphi(\zeta)| \geq C|\zeta|^2 \quad \text{при} \quad |\zeta| \geq R.$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 19.1. *Функция $F(z)$ голоморфна в D_+ и непрерывна на $\overline{D}_+$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку F есть первообразная функции, голоморфной в области D , она голоморфна не только на D_+ , но и во всех точках множества

$$\overline{D}_+ \cap D = \overline{D}_+ \setminus \left\{ \pm 1, \pm \frac{1}{k} \right\}.$$

Непрерывность F в оставшихся точках $\pm 1, \pm 1/k, \infty \in \overline{D}_+$ вытекает из приведенных выше оценок. Предположим, например, что $|z-1| \leq \delta$. Тогда $F(z) - F(1)$ совпадает с интегралом от $1/\varphi(\zeta)$ по прямолинейному отрезку $[1, z]$, который можно параметризовать как

$$z = 1 + \rho e^{i\theta}, \quad 0 \leq \rho \leq |z-1|.$$

Отсюда и из (19.2) следует, что

$$|F(z) - F(1)| \leq \int_0^{|z-1|} \frac{d\rho}{C\sqrt{\rho}} = \frac{2}{C} \sqrt{|z-1|}, \quad (19.3)$$

т.е. функция $F(z)$ непрерывна в точке $z = 1$. Аналогичные оценки справедливы для $F(z)$ при $z = -1, \pm 1/k$. Если же $|z| \geq R$, то

вместо неравенства (19.3) получается оценка

$$|F(z) - F(\infty)| \leq \frac{1}{C|z|}.$$

■

УТВЕРЖДЕНИЕ 19.2. *Функция $F(z)$ биголоморфно отображает верхнюю полуплоскость D_+ на открытый прямоугольник $\square$ с вершинами в точках $\pm K, \pm K + iK'$, где положительные константы K, K' задаются формулами*

$$K := \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}, \quad K' := \int_1^{1/k} \frac{dx}{\sqrt{(x^2-1)(1-k^2x^2)}}$$

с обычными положительными значениями корней.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу принципа соответствия границ (см. п. 18.1) и утверждения 19.1 достаточно проверить, что F биективно отображает границу $\partial D_+ = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ на $\partial \square$.

Из определения F ясно, что $F(0) = 0$ и функция $w = F(z)$ биективно отображает отрезок $[0, 1] \subset \mathbb{R}$ плоскости z на отрезок $[0, K] \subset \mathbb{R}$ плоскости w (поскольку подынтегральное выражение положительно, то $F(x)$ монотонно возрастает от 0 до K , когда x пробегает отрезок $[0, 1]$).

Посмотрим теперь, что происходит с функцией $F(x)$, когда x пробегает отрезок вещественной оси от 1 до $1/k$. При $x \in (1, 1/k)$ функцию $F(x)$ можно представить в виде

$$F(x) = \int_0^x \frac{d\xi}{\varphi(\xi)} = \int_0^1 \frac{d\xi}{\varphi(\xi)} + \int_1^x \frac{d\xi}{\varphi(\xi)},$$

где интегралы в правой части понимаются как несобственные. Заменим в этой формуле интегрирование по отрезку $[0, x]$ интегралом по контуру Γ_δ , обходящему точку $x = 1$ по малой полукругности

$$\gamma = \gamma_\delta = \{|z - 1| = \delta, \operatorname{Im} z \geq 0\}$$

с центром в точке $z = 1$ радиуса δ , лежащую в верхней полуплоскости $\overline{D}_+$ (см. рис. 68). Мы рассматриваем ее как путь γ в $\overline{D}_+$ с началом в точке $z = 1 - \delta$ и концом в точке $z = 1 + \delta$, параметризуемый посредством $z = 1 + \delta e^{i\theta}$, где θ изменяется от π до 0.

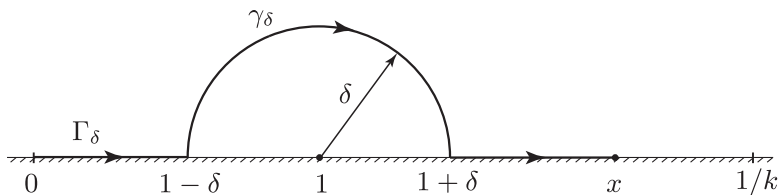


Рис. 68

Интеграл по Γ_δ , равный

$$\int_{\Gamma_\delta} \frac{d\zeta}{\varphi(\zeta)} = \int_0^{1-\delta} \frac{d\xi}{\varphi(\xi)} + \int_{\gamma_\delta} \frac{d\zeta}{\varphi(\zeta)} + \int_{1+\delta}^x \frac{d\xi}{\varphi(\xi)},$$

с одной стороны, не зависит от $\delta > 0$ по теореме Коши. С другой стороны, он имеет предел при $\delta \rightarrow 0$ (интеграл по γ_δ оценивается через $C\sqrt{\delta}$ ввиду неравенства (19.2)), равный

$$\int_0^1 \frac{d\xi}{\varphi(\xi)} + \int_1^x \frac{d\xi}{\varphi(\xi)} = F(x).$$

Следовательно,

$$F(x) = \int_{\Gamma_\delta} \frac{d\zeta}{\varphi(\zeta)}$$

при любом достаточно малом δ .

Подсчитаем приращение аргумента подкоренного выражения вдоль полуокружности γ_δ . Аргумент

$$1 - z = -\delta e^{i\theta} = \delta e^{i(\theta-\pi)}$$

при обходе вдоль γ_δ изменяется от 0 до $-\pi$, а аргументы трех других сомножителей $1 + z$, $1 \pm kz$ в выражении для $\varphi(z)$ при обходе вдоль γ_δ не меняются. Поэтому

$$\Delta_\gamma \arg(1 - z^2)(1 - k^2 z^2) = \Delta_\gamma \arg(1 - z) = -\pi,$$

где мы воспользовались равенством

$$\begin{aligned} \Delta_\gamma \arg[(1 - z)(1 + z)(1 - kz)(1 + kz)] &= \Delta_\gamma \arg(1 - z) \\ &+ \Delta_\gamma \arg(1 + z) + \Delta_\gamma \arg(1 - kz) + \Delta_\gamma \arg(1 + kz), \end{aligned}$$

вытекающим из определения $\Delta_\gamma \arg$ в п. 13.2. Поэтому приращение подынтегрального корня равно

$$\Delta_\gamma \arg \varphi(z) = -\frac{\pi}{2}$$

(при извлечении корня аргумент делится на 2), т.е. $\arg \varphi(x) = -\pi/2$ при $x \in (1, 1/k]$. Следовательно, для всех $x \in (1, 1/k)$ будем иметь

$$\varphi(x) = -i\sqrt{(x^2 - 1)(1 - k^2x^2)}$$

с обычным положительным значением корня. Тем самым, при $x \in (1, 1/k)$

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_0^{1-\delta} \frac{d\xi}{\sqrt{(1-\xi^2)(1-k^2\xi^2)}} + \int_{\gamma_\delta} \frac{d\zeta}{\varphi(\zeta)} \\ &\quad + i \int_{1+\delta}^x \frac{d\xi}{\sqrt{(\xi^2-1)(1-k^2\xi^2)}}, \end{aligned}$$

что (при $\delta \rightarrow 0$) совпадает с

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_0^1 \frac{d\xi}{\sqrt{(1-\xi^2)(1-k^2\xi^2)}} + i \int_1^x \frac{d\xi}{\sqrt{(\xi^2-1)(1-k^2\xi^2)}} \\ &= K + i \int_1^x \frac{d\xi}{\sqrt{(\xi^2-1)(1-k^2\xi^2)}}. \end{aligned}$$

Из этой формулы вытекает, что $w = F(z)$ биективно отображает отрезок $[1, 1/k]$ плоскости z на отрезок $[K, K + iK']$ плоскости w . Действительно, $F(1) = K$ и подынтегральное выражение в

$$\int_1^x \frac{d\xi}{\sqrt{(\xi^2-1)(1-k^2\xi^2)}}$$

положительно. Поэтому указанный интеграл монотонно возрастает от 0 до K' , когда x пробегает отрезок $[1, 1/k]$.

Для $x \in (1/k, +\infty)$ аналогично получаем, что $\arg \varphi(x) = -\pi$, т.е.

$$\varphi(x) = -\sqrt{(x^2 - 1)(k^2x^2 - 1)}$$

и, следовательно, $w = F(z)$ биективно отображает луч $[1/k, +\infty]$ плоскости z на отрезок $[K + iK', K + iK' - K'']$ плоскости w , где положительная константа

$$K'' := \int_{1/k}^\infty \frac{dx}{\sqrt{(x^2-1)(k^2x^2-1)}} \underset{\substack{\text{замена} \\ y=1/kx}}{=} \int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}}$$

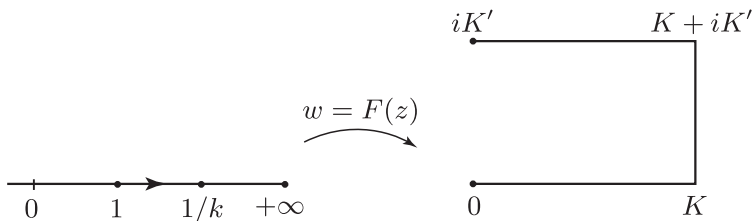


Рис. 69

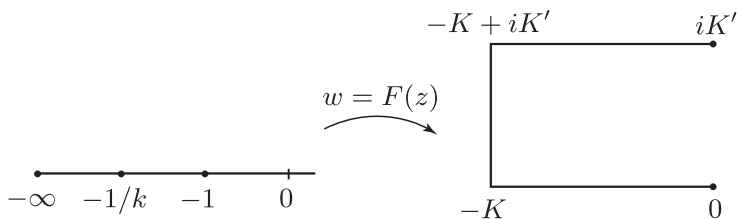


Рис. 70

на самом деле совпадает с K . Таким образом, $w = F(z)$ биективно отображает отрезок $[1/k, +\infty]$ плоскости z на отрезок $[K + iK', iK']$ плоскости w . В итоге получаем, что функция $w = F(z)$ биективно отображает положительную полуось $[0, +\infty]$ плоскости z на ломаную с последовательными вершинами $0, K, K + iK', iK'$ (см. рис. 69). Аналогично находится образ отрицательной полуоси $[0, -\infty]$ — это ломаная с вершинами $0, -K, -K + iK', iK'$ (см. рис. 70). Тем самым проверено, что F биективно отображает ∂D_+ на $\partial \square$. ■

Задача. Пусть $0 < k < 1$. Докажите, что эллиптический интеграл 2-го рода

$$F(z) = \int_0^z \sqrt{\frac{1 - k^2 \zeta^2}{1 - \zeta^2}} d\zeta$$

конформно отображает верхнюю полуплоскость $D_+ = \{\operatorname{Im} z > 0\}$ на некоторую область D и найдите эту область.

Указание: в данном случае $F(\infty) = \infty$, из-за чего область D будет неограничена и нельзя будет применить утверждения из п. 18.1. Однако, пользуясь тем, что приращение аргумента $\Delta_{\gamma_R} \arg F(z)$ вдоль большой полуокружности $\gamma_R = \{z \in D_+ : |z| = R\}$ (пробегаемой в направлении от R к $-R$) равно $\pi + o(1)$ при $R \rightarrow +\infty$, можно установить требуемый результат, повторяя доказательство принципа соответствия границ.

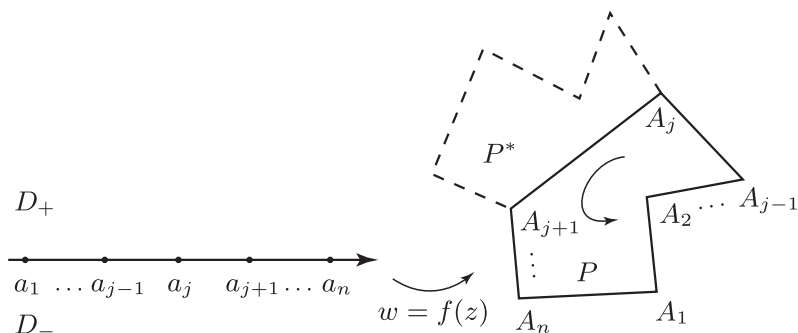


Рис. 71

19.2. Интеграл Кристоффеля–Шварца. Эллиптический интеграл из п. 19.1 выглядит довольно сложной функцией, а его появление в задаче о конформных отображениях производит впечатление хитрого трюка. Спрашивается, можно ли было предвидеть заранее, что конформное отображение полуплоскости на прямоугольник следует искать именно в таком виде? Оказывается, да. Более того, подобное рассуждение можно провести для любого ограниченного многоугольника, как показывает формулируемый ниже результат.

Обозначим через P многоугольник в $\mathbb{C}$, т.е. ограниченную одностовязную область в $\mathbb{C}$, граница которой является ломаной с последовательными вершинами $A_1, A_2, \dots, A_n$ (*направление обхода положительное*), см. рис. 71. Предположим, что внутренний угол при вершине A_j равен $\pi\alpha_j$, где $0 < \alpha_j < 2$. Допустим, что функция f биголоморфно отображает верхнюю полуплоскость D_+ на многоугольник P и непрерывно продолжается до гомеоморфизма $\overline{D}_+$ на $\overline{P}$ (существование такой функции вытекает из теорем Римана и Каратеодори). Обозначим через $a_1 < a_2 < \dots < a_n$ прообразы точек $A_1, A_2, \dots, A_n$ при отображении f (мы предполагаем, в частности, что $f(\infty)$ не является вершиной P ; если это не так, то нужно заменить f на ее композицию с подходящим дробно-линейным автоморфизмом D_+). Тогда указанная функция f задается следующим *интегралом Кристоффеля–Шварца*:

$$f(z) = C_1 \int_{z_0}^z (\zeta - a_1)^{\alpha_1 - 1} (\zeta - a_2)^{\alpha_2 - 1} \dots (\zeta - a_n)^{\alpha_n - 1} d\zeta + C_2,$$

$$z \in D_+, \quad (19.4)$$

где $C_1, C_2 \in \mathbb{C}$ — некоторые константы (выбор начальной точки $z_0 \in D_+$ и ветви подынтегрального выражения в $\overline{D}_+$ не имеет принципиального значения — другой выбор приведет лишь к изменению констант C_1, C_2).

ЗАМЕЧАНИЕ. Для случая прямоугольника $P = \square$, когда в роли точек a_j выступают $\pm 1, \pm 1/k$, а $\alpha_j = 1/2$ для всех $j = 1, \dots, 4$, формула Кристоффеля–Шварца сводится к эллиптическому интегралу из п. 19.1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ФОРМУЛЫ КРИСТОФФЕЛЯ–ШВАРЦА.

Шаг 1. Покажем, что функция

$$g(z) := \frac{f''(z)}{f'(z)}, \quad z \in D_+,$$

допускает аналитическое продолжение в область $\mathbb{C} \setminus \{a_1, \dots, a_n\}$.

Действительно, в силу гомеоморфности $f: \partial D_+ \rightarrow \partial P$ образ произвольного отрезка $[a_j, a_{j+1}] \subset \mathbb{R}$ (а также “отрезка” $[a_n, a_1] \subset \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, содержащего ∞) при отображении f содержится в отрезке $[A_j, A_{j+1}]$ (соответственно $[A_n, A_1]$) на плоскости переменного w . Поэтому, применяя конструкцию принципа симметрии (изложенную в первом шаге доказательства этого принципа), мы можем продолжить f до функции, голоморфной в области $D_+ \cup (a_j, a_{j+1}) \cup D_-$, сужение которой на нижнюю полуплоскость $D_- := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z < 0\}$ задает биголоморфизм D_- на многоугольник P^* , симметричный P относительно прямой $A_j A_{j+1}$. (Отметим, что в этом месте нельзя сослаться на сам принцип симметрии, поскольку не обязательно выполнено условие $P \cap P^* = \emptyset$.)

Полученное отображение нижней полуплоскости D_- на многоугольник P^* можно снова аналитически продолжить в верхнюю полуплоскость D_+ через другой отрезок $[a_k, a_{k+1}]$ до биголоморфного отображения D_+ на многоугольник P^{**} , симметричный P^* относительно прямой $A_k A_{k+1}$ и т.д. Таким образом, исходный элемент (D_+, f) можно продолжить по любому пути

$$\gamma: I \rightarrow \overline{C} \setminus \{a_1, \dots, a_n\},$$

последовательно применяя симметрию относительно тех отрезков вещественной оси, которые пересекает путь γ .

В результате мы получаем некоторую аналитическую функцию $\mathcal{F}$ в области $\overline{\mathbb{C}} \setminus \{a_1, \dots, a_n\}$. Любые две однозначные ветви f_1, f_2 функции $\mathcal{F}$ в верхней полуплоскости D_+ конформно отображают D_+ на многоугольники P_1, P_2 , получаемые друг из друга конечным (и притом четным) числом симметрий относительно сторон. Но любое преобразование указанного вида является движением плоскости, т.е. сводится к сдвигу с поворотом. Поэтому f_2 получается из f_1 заменой переменных, задаваемой сдвигом с поворотом, т.е.

$$f_2(z) = e^{i\theta} f_1(z) + C$$

для некоторых констант $\theta \in \mathbb{R}$, $C \in \mathbb{C}$. Отсюда, в частности, следует, что

$$\frac{f_1''}{f_1'} = \frac{f_2''}{f_2'} \quad \text{в } D_+$$

(заметим, что производные f_1' и f_2' не обращаются в нуль в D_+ в силу конформности f_1 и f_2). Поэтому при аналитическом продолжении исходной функции f функция $g := f''/f'$ продолжается до *однозначной* голоморфной функции на области $\mathbb{C} \setminus \{a_1, \dots, a_n\}$, что и утверждалось.

Шаг 2. Покажем, что функция g имеет в каждой точке $z = a_j$ полюс 1-го порядка с вычетом $\alpha_j - 1$ и голоморфна в окрестности точки ∞ .

Исследуем сначала поведение функции g в окрестности точки $z = a_j$. Для этого рассмотрим отображение

$$\zeta = \varphi(w) = (w - A_j)^{1/\alpha_j}.$$

Здесь имеется в виду любая ветвь этой функции на надлежащей связанной компоненте пересечения P с достаточно малым кругом $\{|w - A_j| < \varepsilon\}$. (Эта компонента представляет собой круговой сектор раствора $\pi\alpha_j$ с вершиной A_j , т.е. всегда односвязна.) Отображение φ переводит угол раствора $\pi\alpha_j$ с вершиной A_j в угол раствора π (см. рис. 72). Поэтому для достаточно малых $\delta > 0$ композиция

$$\tilde{f} := \varphi \circ f$$

(которая априори определена в $\overline{D}_+ \cap \{|z - a_j| < \delta\}$) переводит интервал $[a_j - \delta, a_j + \delta] \subset \mathbb{R}$ в интервал на прямой в плоскости ζ и, значит, аналитически продолжается по принципу симметрии до

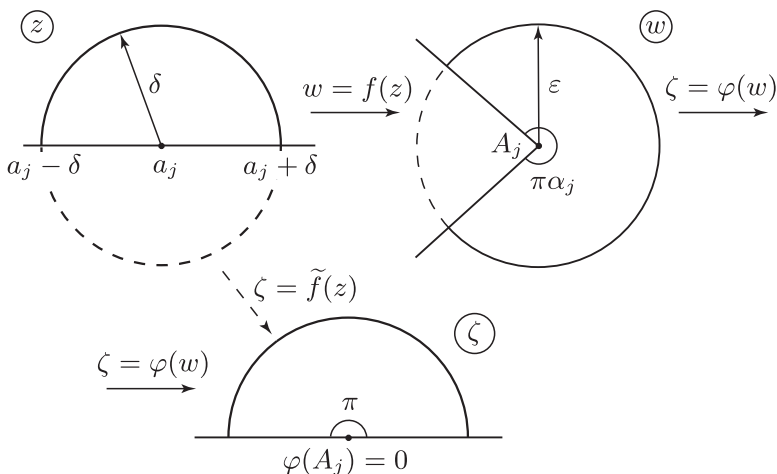


Рис. 72

функции, которая голоморфна в круге $\{|z - a_j| < \delta\}$ и имеет в точке $z = a_j$ ненулевую производную (согласно критерию локальной обратимости из п. 14.2). Поскольку $\tilde{f}(a_j) = 0$, то в окрестности точки $z = a_j$ ее можно записать в виде

$$\tilde{f}(z) = (z - a_j)h(z),$$

где h — некоторая функция, голоморфная и не обращающаяся в нуль в окрестности a_j . Логарифм этой функции $\ln h(z)$ является аналитической функцией в указанной окрестности и допускает в ней выделение голоморфной ветви $\Phi(z)$ согласно п. 11.4. Тем самым,

$$\tilde{f}(z) = (z - a_j)e^{\Phi(z)} = (f(z) - A_j)^{1/\alpha_j}.$$

Возводя обе части второго равенства в степень α_j , получаем

$$f(z) = A_j + (z - a_j)^{\alpha_j} e^{\alpha_j \Phi(z)}.$$

Дифференцируя полученное соотношение, приходим к

$$\begin{aligned} f'(z) &= \alpha_j (z - a_j)^{\alpha_j - 1} e^{\alpha_j \Phi(z)} + (z - a_j)^{\alpha_j} \alpha_j \Phi'(z) e^{\alpha_j \Phi(z)} \\ &= (z - a_j)^{\alpha_j - 1} e^{\Psi(z)}, \end{aligned}$$

где $\Psi(z)$ — функция, голоморфная в окрестности точки $z = a_j$. Продолжая действовать формально, прологарифмируем последнее равенство

$$\ln f'(z) = (\alpha_j - 1) \ln(z - a_j) + \Psi(z)$$

и продифференцируем полученное соотношение. Получим

$$g(z) = \frac{f''(z)}{f'(z)} = \frac{\alpha_j - 1}{z - a_j} + \Psi'(z).$$

Формальные выкладки, с помощью которых получено это равенство, обоснованы в окрестности любой точки из $D_+ \cap \{|z - a_j| < \delta\}$ (где $z - a_j$ и $f'(z)$ не обращаются в нуль, так что все степени и логарифмы определены и голоморфны). Но, в силу теоремы единственности, полученное равенство справедливо и при $0 < |z - a_j| < \delta$. Поскольку функция $\Psi'(z)$ голоморфна при $|z - a_j| < \delta$, получаем отсюда требуемое утверждение о поведении функции g в окрестности точки $z = a_j$.

Перейдем к доказательству голоморфности функции g в окрестности точки ∞ . Согласно шагу 1 исходная функция f продолжается из D_+ до функции, голоморфной в целой окрестности точки ∞ , т.е.

$$f(z) = c_0 + \frac{c_1}{z} + \frac{c_2}{z^2} + \dots \quad \text{при } |z| > R,$$

где $c_1 \neq 0$ в силу локальной обратимости f в точке ∞ . Отсюда

$$f'(z) = -\frac{c_1}{z^2} + \dots \quad \text{и} \quad f''(z) = 2\frac{c_1}{z^3} + \dots,$$

т.е. функция

$$g(z) = \frac{f''(z)}{f'(z)} = -\frac{2}{z} + \dots$$

голоморфна в точке ∞ .

Шаг 3. Итак, мы показали, что функция $g(z)$ голоморфна в области $\overline{\mathbb{C}} \setminus \{a_1, \dots, a_n\}$ и имеет в точках $z = a_j$ простые полюсы с вычетами $\alpha_j - 1$. По теореме о функциях, мероморфных на $\overline{\mathbb{C}}$ (п. 7.11), это означает, что

$$g(z) = \frac{\alpha_1 - 1}{z - a_1} + \dots + \frac{\alpha_n - 1}{z - a_n} \quad \text{для всех } z \in \overline{\mathbb{C}}.$$

Считая, что $z \in D_+$, можно в левой части этого равенства заменить $g(z)$ на $f''/f' = (\ln f')'$ (логарифм корректно определен в силу п. 11.4). Интегрируя эту функцию по любому пути в D_+ , связывающему $z_0 \in D_+$ с z , и затем потенцируя, получим:

$$f'(z) = C_1(z - a_1)^{\alpha_1 - 1} \cdots (z - a_n)^{\alpha_n - 1} \quad \text{для всех } z \in D_+,$$

где $C_1 \in \mathbb{C}$ — ненулевая константа. Снова интегрируя это выражение по любому пути в D_+ , связывающему z_0 с z , придем к формуле Кристоффеля–Шварца (19.4). ■

Задачи. (1) Записав теорему о полной сумме вычетов для функции $g(z)$, участвующей в доказательстве формулы Кристоффеля–Шварца, покажите, что сумма внутренних углов любого односвязного n -угольника на плоскости равна $\pi(n - 2)$.

(2) Пусть $f \not\equiv \text{const}$ — произвольная функция, голоморфная в окрестности ∞ . Покажите, что то же самое верно и для функции f''/f' .

Лекция 20. Эллиптические функции

20.1. Эллиптический синус. Определим функцию

$$z = \operatorname{sn}(w) = \operatorname{sn}(w, k),$$

называемую *эллиптическим синусом*, как биголоморфное отображение прямоугольника

$$\square := \{w \in \mathbb{C} : |\operatorname{Re} w| < K, 0 < \operatorname{Im} w < K'\}$$

с вершинами в точках $\pm K, \pm K + iK'$ на верхнюю полуплоскость $D_+ = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$, обратное к эллиптическому интегралу

$$w = F(z, k) = \int_0^z \frac{d\zeta}{\sqrt{(1 - \zeta^2)(1 - k^2 \zeta^2)}}$$

из п. 19.1.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. *Функция $z = \operatorname{sn}(w)$ аналитически продолжается до мероморфной функции во всей комплексной плоскости (обозначаемой снова через $\operatorname{sn}(w)$). Полюсы функции $\operatorname{sn}(w)$ располагаются на решетке*

$$\Lambda := \{iK' + 2Kn + 2iK'm : n, m \in \mathbb{Z}\}$$

и имеют порядок 1. Продолженная функция $z = \operatorname{sn}(w)$ двоякопериодична, т.е.

$$\operatorname{sn}(w + 4K) = \operatorname{sn}(w), \quad \operatorname{sn}(w + 2iK') = \operatorname{sn}(w) \quad (20.1)$$

для всех $w \in \mathbb{C}$, за исключением точек решетки Λ , и удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$[\operatorname{sn}'(w)]^2 = (1 - \operatorname{sn}(w)^2)(1 - k^2 \operatorname{sn}(w)^2) \quad (20.2)$$

во всех точках $w \in \mathbb{C}$, где она голоморфна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим временно прямоугольник $\square$ через $\square_{0,0}$. По определению функция $z = \operatorname{sn}(w)$ биголоморфно отображает прямоугольник $\square_{0,0}$ на верхнюю полуплоскость D_+ . Обозначим через

$$\square_{1,0}, \quad \square_{-1,0}, \quad \square_{0,1}, \quad \square_{0,-1}$$

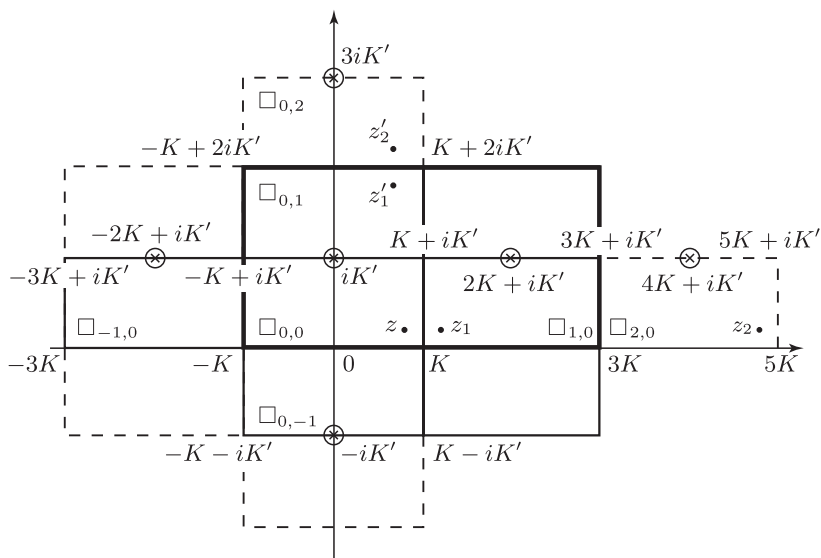


Рис. 73

четыре прямоугольника, симметричных $\square_{0,0}$ относительно его сторон (см. рис. 73). Тогда по принципу симметрии функция $z = \operatorname{sn}(w)$ допускает аналитическое продолжение в каждый из четырех прямоугольников $\square_{\pm 1,0}$, $\square_{0,\pm 1}$. При этом продолжение $z = \operatorname{sn}(w)$ в любой из этих прямоугольников биголоморфно отображает его на нижнюю полуплоскость D_- и потому удовлетворяет условиям принципа симметрии относительно каждой из его четырех сторон. Следовательно, мы можем снова применить принцип симметрии относительно сторон прямоугольников $\square_{\pm 1,0}$, $\square_{0,\pm 1}$ и в результате получим продолжение $z = \operatorname{sn}(w)$ в прямоугольники $\square_{m,n}$, симметричные $\square_{\pm 1,0}$, $\square_{0,\pm 1}$ относительно их сторон. Это продолжение будет давать биголоморфное отображение прямоугольников $\square_{m,n}$ снова на верхнюю полуплоскость D_+ . Если при этом какие-то два из полученных 16 продолжений имеют одну и ту же область определения (ею может быть либо исходный прямоугольник $\square_{0,0}$, либо один из 9 новых прямоугольников, возникших на втором шаге), то они на этой области определения совпадают. (Это вытекает из формулы $F(z) = f(z^*)^*$ и того, что симметрии относительно любых двух перпендикуляр-

ных прямых коммутируют.) Более того, рассмотрим, например, прямоугольник $\square_{2,0}$, полученный на втором шаге, который симметричен прямоугольнику $\square_{1,0}$ относительно его боковой стороны $[3K, 3K + iK']$. Так как, в свою очередь, прямоугольник $\square_{1,0}$ получается из исходного прямоугольника $\square_{0,0}$ отражением относительно боковой стороны $[K, K + iK']$, то $\square_{2,0}$ получается из $\square_{0,0}$ композицией двух отражений, т.е. сдвигом $w \mapsto w + 4K$. В плоскости переменного z каждому из этих отражений отвечает симметрия относительно вещественной оси, а их композиции — тождественное отображение $z \mapsto z$ верхней полуплоскости D_+ . Отсюда вытекает соотношение

$$\operatorname{sn}(w + 4K) = \operatorname{sn}(w), \quad (20.1')$$

выполненное для всех точек $w \in \square_{0,0}$. С другой стороны, мы можем рассмотреть прямоугольник $\square_{0,2}$, который получается также на втором шаге из исходного прямоугольника $\square_{0,0}$ композицией отражений относительно стороны $[-K + iK', K + iK']$ прямоугольника $\square_{0,0}$ и стороны $[-K + 2iK', K + 2iK']$ прямоугольника $\square_{0,1}$. По тем же соображениям, что и выше, получим соотношение

$$\operatorname{sn}(w + 2iK') = \operatorname{sn}(w), \quad (20.1'')$$

выполненное для всех точек $w \in \square_{0,0}$.

Продолжая указанный процесс бесконечное число раз, мы получим продолжение функции $\operatorname{sn}(w)$ на всю плоскость до *однозначной* функции, которая голоморфна во всех точках плоскости, за исключением точки iK' и всех точек, полученных из нее симметриями относительно сторон прямоугольников, т.е. точек решетки

$$\Lambda := \{iK' + 2Kn + 2iK'm : n, m \in \mathbb{Z}\}.$$

Действительно, все эти точки по принципу симметрии переходят в ∞ плоскости z , т.е. функция $\operatorname{sn}(w)$ имеет в них полюсы. Также из принципа симметрии вытекает локальная обратимость функции $1/\operatorname{sn}(w)$ в окрестности любой точки множества Λ , откуда в силу п. 14.2 следует, что все указанные полюсы имеют 1-й порядок.

Из теоремы единственности вытекает, что соотношения (20.1') и (20.1'') для функции $\operatorname{sn}(w)$, проверенные в точках $w \in \square_{0,0}$, выполняются, на самом деле, во всех точках голоморфности функции $\operatorname{sn}(w)$, т.е. при всех $w \in \mathbb{C}$, за исключением точек решетки Λ . Тем самым, функция $\operatorname{sn}(w)$ двоякопериодична.

Дифференциальное уравнение (20.2) из формулировки теоремы, очевидно, выполняется при $w \in \square_{0,0}$ (это вытекает прямо из определения $\operatorname{sn}(w)$ через эллиптический интеграл). По теореме единственности оно верно и для всех $w \in \mathbb{C} \setminus \Lambda$. ■

В силу свойства двоякопериодичности естественной областью определения эллиптического синуса является *комплексный тор* X , полученный из комплексной плоскости $\mathbb{C}$ отождествлением всех точек вида $z + 4Kn + 2iK'm$, $n, m \in \mathbb{Z}$. В следующих лекциях мы изучим эту ситуацию в более общем виде.

ЗАДАЧА. Покажите, что

$$\lim_{k \rightarrow 0+} \operatorname{sn}(w, k) = \sin w \quad \text{для всех } w \in \mathbb{C}$$

(этим и объясняется название “эллиптического синуса”). Во что переходит в пределе $k \rightarrow 0$ прямоугольник $\square = \{|\operatorname{Re} w| < K, 0 < \operatorname{Im} w < K'\}$?

20.2. Периоды мероморфных функций. Число $\tau \in \mathbb{C}$ называется *периодом* функции f , определенной на $\mathbb{C}$, если

$$f(z + \tau) = f(z) \quad \text{для всех } z \in \mathbb{C}.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 20.1. Множество $T = \{\tau\}$ всех периодов непостоянной мероморфной функции $f: \mathbb{C} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ есть замкнутая дискретная (т.е. не имеющая предельных точек в $\mathbb{C}$) подгруппа аддитивной группы $\mathbb{C}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. То, что T есть замкнутая подгруппа $\mathbb{C}$, сразу вытекает из определения периода и непрерывности f . Проверим, что множество T дискретно. Допустим, напротив, что найдется последовательность τ_n (попарно различных) периодов из T , которая сходится к $\tau_0 \in \mathbb{C}$ (как отмечено выше, τ_0 тоже принадлежит T). Поскольку $\tau_n - \tau_0$ являются периодами из T , то

$$f(z + \tau_n - \tau_0) = f(z) \quad \text{для всех } z \in \mathbb{C}.$$

Пусть $z_0 \in \mathbb{C}$ — произвольная точка голоморфности функции f . Тогда из предыдущего равенства следует, что

$$f(z_n) = f(z_0) = \operatorname{const} \quad \text{для } z_n := z_0 + \tau_n - \tau_0 \rightarrow z_0, \quad z_n \neq z_0,$$

что невозможно по теореме единственности ($f \not\equiv \operatorname{const}$ по условию). ■

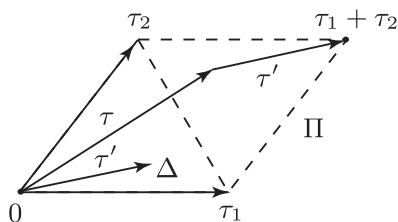


Рис. 74

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 20.2. *Непостоянная мероморфная функция не может иметь более двух линейно независимых (над $\mathbb{R}$) периодов.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Допустим сначала, что все периоды функции f лежат на некоторой прямой, проходящей через 0.

Поскольку множество T всех периодов функции f дискретно, оно состоит либо из одной точки 0 (в этом случае утверждение становится тривиальным), либо содержит элемент $\tau_0 \in T \setminus \{0\}$ с наименьшим модулем. Покажем, что в последнем случае все остальные элементы $\tau \in T$ кратны τ_0 . Действительно, иначе нашелся бы период τ вида

$$\tau = n\tau_0 + \alpha\tau_0, \quad \text{где } n \in \mathbb{Z}, \quad 0 < \alpha < 1.$$

Но тогда период $\alpha\tau_0 = \tau - n\tau_0$ имел бы модуль, строго меньший $|\tau_0|$, что противоречит определению τ_0 . Итак, в этом случае функция f имеет период τ_0 такой, что все остальные периоды f являются его целыми кратными.

2) Пусть теперь не все периоды f лежат на одной прямой.

Из дискретности множества T вытекает, что найдется замкнутый треугольник Δ с вершинами в точках $0, \tau_1, \tau_2 \in T$, не содержащий других точек T , кроме своих вершин. Тогда замкнутый параллелограмм Π с вершинами $0, \tau_1, \tau_2, \tau_1 + \tau_2$ также не содержит других точек из T , кроме своих вершин (см. рис. 74). Действительно, если бы в Π нашелся период $\tau \in T$, отличный от вершин Π , то либо сам период τ , либо симметричный ему (относительно центра параллелограмма) период $\tau' := \tau_1 + \tau_2 - \tau$ принадлежал бы треугольнику Δ , вопреки выбору Δ .

Покажем, что любой элемент $\tau \in T$ представим в виде $\tau = n\tau_1 + m\tau_2$ для некоторых $n, m \in \mathbb{Z}$. Действительно, допустим,

напротив, что нашелся элемент $\tau \in T$, представимый в виде

$$\tau = (n + \alpha)\tau_1 + (m + \beta)\tau_2,$$

где $n, m \in \mathbb{Z}$ и $0 \leq \alpha, \beta < 1$ — некоторые числа, из которых хотя бы одно отлично от нуля. Но тогда период

$$\alpha\tau_1 + \beta\tau_2 = \tau - n\tau_1 - m\tau_2$$

принадлежал бы параллелограмму Π и был отличен от его вершин, что противоречит выбору Π . Таким образом, в этом случае функция f имеет два линейно независимых периода τ_1 и τ_2 таких, что все остальные периоды f являются из целочисленными линейными комбинациями. ■

ЗАДАЧА. Покажите, что всякая замкнутая дискретная подгруппа аддитивной группы $\mathbb{R}^n$ имеет вид

$$\{k_1x_1 + k_2x_2 + \dots + k_mx_m : k_1, \dots, k_m \in \mathbb{Z}\}$$

для некоторых линейно независимых векторов $x_1, \dots, x_m \in \mathbb{R}^n$.

20.3. Определение и свойства эллиптических функций.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Любая непостоянная двоякопериодическая мероморфная функция $f: \mathbb{C} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ называется *эллиптической функцией*.

Как мы видели, множество периодов эллиптической функции есть решетка вида

$$L = \{n\tau_1 + m\tau_2 : n, m \in \mathbb{Z}\}.$$

Для определенности будем всегда считать, что

$$\operatorname{Im}\left(\frac{\tau_2}{\tau_1}\right) > 0,$$

т.е. направление вектора τ_2 получается из направления вектора τ_1 поворотом на угол от 0 до π . В силу двоякопериодичности эллиптическую функцию f достаточно изучать в любом параллелограмме Π с вершинами в точках $z_0, z_0 + \tau_1, z_0 + \tau_2, z_0 + \tau_1 + \tau_2$. Такой параллелограмм называется *фундаментальным*. Далее, мы будем обычно считать для простоты, что $z_0 = 0$. Для того чтобы

сдвиги параллелограмма Π на векторы решетки L не пересекались между собой и покрывали всю плоскость, будем присоединять к внутренности параллелограмма Π также открытые отрезки $(0, \tau_1)$, $(0, \tau_2)$, лежащие на его сторонах, и точку 0 .

Свойство 20.1. *Эллиптические функции с данной решеткой периодов L , если к ним добавить все тождественно постоянные функции на $\mathbb{C}$, образуют поле, замкнутое относительно операции дифференцирования.*

Свойство 20.2 (теорема Лиувилля). *Всякая эллиптическая функция имеет хотя бы один полюс. Иными словами, не существует целых эллиптических функций.*

Доказательство. Целая эллиптическая функция была бы ограничена на своем фундаментальном параллелограмме Π , а значит, и на всей плоскости $\mathbb{C}$. По теореме Лиувилля она должна быть тождественной константой. ■

Свойство 20.3. *Сумма вычетов эллиптической функции по всем полюсам, принадлежащим фундаментальному параллелограмму Π , равна нулю.*

Доказательство. Выберем фундаментальный параллелограмм Π с вершинами в точках z_0 , $z_0 + \tau_1$, $z_0 + \tau_2$, $z_0 + \tau_1 + \tau_2$ так, чтобы на границе Π не было полюсов f . Функция f принимает одинаковые значения на противоположных сторонах Π . Поэтому по теореме Коши о вычетах

$$2\pi i \sum_{a \in \Pi} \operatorname{res}_a f = \int_{\partial \Pi} f dz = 0,$$

поскольку противоположные стороны Π проходятся в противоположных направлениях и интегралы по ним в сумме дают нуль. ■

Следствие. *Эллиптическая функция имеет в фундаментальном параллелограмме не менее двух полюсов (с учетом кратности).*

Доказательство. Иначе функция f имела бы в параллелограмме Π единственный полюс 1-го порядка. При этом вычет

в этом полюсе был бы равен нулю по свойству 20.3, т.е. указанный полюс был бы устранимой особой точкой, что невозможно по свойству 20.2. ■

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Число полюсов эллиптической функции в фундаментальном параллелограмме (с учетом кратностей) называется ее *порядком*.

СВОЙСТВО 20.4. Эллиптическая функция принимает в фундаментальном параллелограмме каждое значение $a \in \overline{\mathbb{C}}$ одинаковое число раз, равное ее порядку.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Снова можно считать, что на $\partial\Pi$ нет полюсов и a -точек функции f . (Напомним, что z называется a -точкой функции f , если $f(z) = a$.) Пусть N_a есть число a -точек f в параллелограмме Π . По принципу аргумента, примененному к функции $f(z) - a$, имеем:

$$N_a - P = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Pi} \frac{f'(z)}{f(z) - a} dz.$$

Так как подынтегральная функция является эллиптической с теми же периодами, что и f , то интеграл в правой части равен нулю по теореме Коши о вычетах (см. свойство 20.3), откуда следует, что $N_a = P$ совпадает с порядком f . ■

СЛЕДСТВИЕ. Предположим, что эллиптическая функция f имеет в фундаментальном параллелограмме Π нули $\{a_k\}$ порядков n_k и полюсы $\{b_l\}$ порядков m_l . Тогда

$$N - P = \sum n_k - \sum m_l = 0.$$

СВОЙСТВО 20.5. Предположим, что эллиптическая функция f имеет в фундаментальном параллелограмме Π нули $\{a_k\}$ порядков n_k и полюсы $\{b_l\}$ порядков m_l . Тогда

$$\sum n_k a_k - \sum m_l b_l = n\tau_1 + m\tau_2 \quad \text{для некоторых } n, m \in \mathbb{Z}.$$

Иначе говоря,

$$\sum n_k a_k - \sum m_l b_l \equiv 0 \pmod{L}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выберем фундаментальный параллелограмм Π с вершинами в точках z_0 , $z_0 + \tau_1$, $z_0 + \tau_2$, $z_0 + \tau_1 + \tau_2$ так, чтобы точка 0 не принадлежала $\bar{\Pi}$ и на $\partial\Pi$ не было нулей и полюсов функции f . Введем функцию

$$g(z) := z \frac{f'(z)}{f(z)}.$$

Она мероморфна в окрестности $\bar{\Pi}$, а ее полюсы в Π располагаются в нулях и полюсах функции f . При этом вычет g в нуле a_k порядка n_k равен $n_k a_k$, а вычет g в полюсе b_l порядка m_l равен $-m_l b_l$ (это проверяется также, как в примерах 13.1, 13.2 из п. 13.1). Применим к функции g теорему Коши о вычетах:

$$2\pi i \left(\sum n_k a_k - \sum m_l b_l \right) = \int_{\partial\Pi} g(z) dz.$$

(Заметим, что это равенство есть частный случай задачи (3) из п. 13.3.) Вклад пары сторон $[z_0, z_0 + \tau_1]$ и $[z_0 + \tau_2, z_0 + \tau_2 + \tau_1]$ параллелограмма Π в правую часть равен

$$\int_{z_0}^{z_0 + \tau_1} g(z) dz - \int_{z_0 + \tau_2}^{z_0 + \tau_1 + \tau_2} g(z) dz.$$

После замены $z = \zeta + \tau_2$ во втором интеграле последнее выражение принимает вид

$$\begin{aligned} \int_{z_0}^{z_0 + \tau_1} z \frac{f'(z)}{f(z)} dz - \int_{z_0}^{z_0 + \tau_1} (\zeta + \tau_2) \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)} d\zeta \\ = -\tau_2 \int_{z_0}^{z_0 + \tau_1} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = -2\pi i m \tau_2, \end{aligned}$$

где

$$m := \frac{1}{2\pi} \Delta_{[z_0, z_0 + \tau_1]} \arg f(z).$$

Это целое число, поскольку $f(z_0) = f(z_0 + \tau_1)$ (см. п. 13.2). Аналогично получаем, что сумма интегралов от $g(z)$ по остальным двум сторонам параллелограмма равна $2\pi i n \tau_1$ для некоторого $n \in \mathbb{Z}$. ■

ЗАМЕЧАНИЕ. В свойстве 20.5 можно заменить нули f на a -точки f для произвольного $a \in \mathbb{C}$.

Лекция 21. Функция Вейерштрасса

21.1. Определение и основные свойства. В п. 20.1 мы рассмотрели конкретный пример эллиптической функции — эллиптический синус $\operatorname{sn}(z)$. Эта функция имеет прямоугольную решетку периодов, порождаемую периодами $\tau_1 = 4K$ и $\tau_2 = 2iK'$. В фундаментальном параллелограмме $\operatorname{sn}(z)$ (обведенном жирной чертой на рис. 73) содержатся ровно два полюса 1-го порядка: $z = iK'$ и $z = 2K + iK'$, так что $\operatorname{sn}(z)$ есть эллиптическая функция 2-го порядка. (Отметим, что согласно следствию из свойства 20.3 это минимальный возможный порядок эллиптической функции.) В этом пункте мы построим для произвольной решетки

$$L = \{n\tau_1 + m\tau_2 : n, m \in \mathbb{Z}\} \quad \text{с} \quad \operatorname{Im} \frac{\tau_2}{\tau_1} > 0$$

эллиптическую функцию 2-го порядка, имеющую L своей решеткой периодов.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Функция Вейерштрасса* задается формулой

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\tau \in L'} \left[\frac{1}{(z - \tau)^2} - \frac{1}{\tau^2} \right], \quad (21.1)$$

где $L' := L \setminus \{0\}$, т.е. суммирование ведется по всем $\tau = n\tau_1 + m\tau_2$ с целыми n, m , не равными одновременно нулю.

Заметим, что ряд в формуле (21.1) нельзя представлять в виде суммы рядов

$$\sum_{\tau \in L'} \frac{1}{(z - \tau)^2} \quad \text{и} \quad \sum_{\tau \in L'} \frac{1}{\tau^2},$$

поскольку указанные ряды по отдельности расходятся.

УТВЕРЖДЕНИЕ 21.1. *Ряд (21.1) сходится абсолютно и равномерно на компактах в $\mathbb{C} \setminus L$, и его сумма есть мероморфная функция на $\mathbb{C}$, имеющая двукратные полюсы в точках решетки L .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через K произвольный компакт в множестве $\mathbb{C} \setminus L$. Имеем

$$\frac{1}{(z - \tau)^2} - \frac{1}{\tau^2} = \frac{2z\tau - z^2}{\tau^2(z - \tau)^2} = \frac{1}{\tau^3} \cdot \frac{2z - z^2/\tau}{(z/\tau - 1)^2}.$$

Так как $|z|$ ограничен некоторой константой при $z \in K$, то при $|\tau| \rightarrow \infty$ второй сомножитель в правой части стремится к $2z$. Поэтому при всех $z \in K$ и достаточно больших $|\tau|$ справедливо неравенство

$$\left| \frac{1}{(z - \tau)^2} - \frac{1}{\tau^2} \right| < \frac{C}{|\tau|^3} \quad (21.2)$$

с некоторой константой $C > 0$. С другой стороны, по условию существует $\varepsilon > 0$ такое, что

$$|z - \tau| > \varepsilon \quad \text{для всех } z \in K \text{ и } \tau \in L'.$$

Поэтому, увеличивая константу C , всегда можно добиться того, чтобы неравенство (21.2) выполнялось при всех $\tau \in L'$ и $z \in K$.

Таким образом, ряд (21.1) для всех $z \in K$ оценивается по модулю (умноженным на C) рядом вида

$$\sum_{\tau \in L'} \frac{1}{|\tau|^3} = \sum_{(n,m) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{0\}} \frac{1}{|n\tau_1 + m\tau_2|^3}. \quad (21.3)$$

Сумму по всем точкам (n, m) решетки $\mathbb{Z}^2 \setminus \{0\}$ можно заменить суммой “по квадратам”: $\max\{|n|, |m|\} = k$ (см. рис. 75), так что

$$\sum_{(n,m) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{0\}} \frac{1}{|n\tau_1 + m\tau_2|^3} = \sum_{k=1}^{\infty} S_k,$$

где

$$S_k := \sum_{\max\{|n|, |m|\} = k} \frac{1}{|n\tau_1 + m\tau_2|^3}.$$

Иначе говоря, S_k есть сумма членов ряда (21.3) по всем точкам τ решетки L , лежащим на границе параллелограмма Π_k с вершинами в точках $k\tau_1 + k\tau_2$, $-k\tau_1 + k\tau_2$, $-k\tau_1 - k\tau_2$, $k\tau_1 - k\tau_2$.

Докажем, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty} S_k$ сходится. Для этого обозначим расстояние от начала координат до границы параллелограмма Π_1 через $h > 0$ (см. рис. 76). Поскольку Π_k получается из Π_1 растяжением в k раз, расстояние от начала координат до границы параллелограмма Π_k равно kh . Следовательно,

$$|\tau| \geq kh \quad \text{для всех } \tau \in \partial\Pi_k.$$

Поскольку на $\partial\Pi_k$ лежат ровно $8k$ точек решетки L , получаем, что

$$S_k \leq 8k \cdot \frac{1}{(kh)^3} = C \frac{1}{k^2},$$

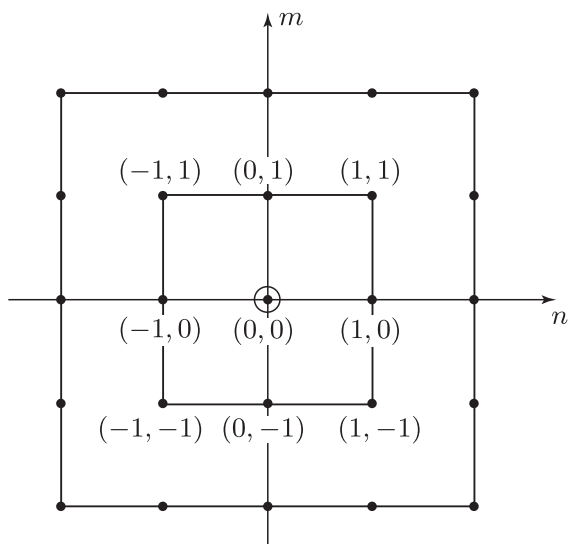


Рис. 75

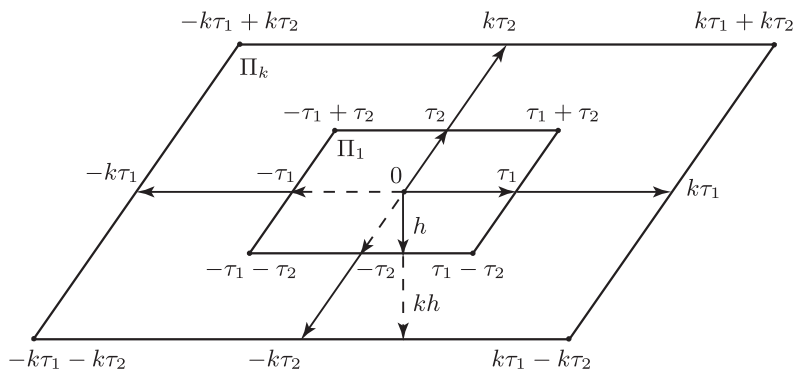


Рис. 76

т.е.

$$\sum_{k=1}^{\infty} S_k \leq C \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < \infty.$$

По признаку Вейерштрасса это влечет абсолютную и равномерную на K сходимость ряда (21.1). По теореме Вейерштрасса (п. 6.14) сумма $\wp(z)$ этого ряда голоморфна на $\mathbb{C} \setminus L$.

Рассмотрим теперь произвольную точку $\tau_0 \in L$. Если исключить из ряда (21.1) член

$$\frac{1}{(z - \tau_0)^2} - \frac{1}{\tau_0^2}$$

(или член $1/(z^2)$ в случае, когда $\tau_0 = 0$), то все остальные его члены будут голоморфны в окрестности τ_0 , а образованный ими ряд будет сходиться равномерно в окрестности τ_0 (это доказывается тем же рассуждением, что и выше). Следовательно, функция $\wp(z)$ имеет в точке τ_0 двукратный полюс. ■

Для доказательства эллиптичности функции $\wp(z)$ необходимо показать, что она двоякопериодична. Указанная двоякопериодичность не очевидна из формулы (21.1), поэтому мы предпочитаем установить ее следующим обходным путем.

УТВЕРЖДЕНИЕ 21.2. *Функция $\wp(z)$ четна, т.е. $\wp(z) = \wp(-z)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Замена z на $-z$ в формуле (21.1) эквивалентна замене τ на $-\tau$ в сумме по $\tau \in L'$. ■

УТВЕРЖДЕНИЕ 21.3. *Производная $\wp'(z)$ функции Вейерштрасса есть нечетная эллиптическая функция порядка 3 с решеткой периодов L .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нечетность $\wp'(z)$ следует из четности $\wp(z)$. Далее, поскольку ряд (21.1) сходится равномерно на компактах в $\mathbb{C} \setminus L$ (утверждение 21.1), его можно дифференцировать почленно. Получаем, что

$$\wp'(z) = -2 \sum_{\tau \in L} \frac{1}{(z - \tau)^3}, \quad (21.4)$$

откуда ясно, что каждое число $\tau \in L$ является периодом функции $\wp'(z)$. Кроме того, $\wp'(z)$ имеет полюсы 3-го порядка в точках

$\tau \in L$ (и только в них). Отсюда следует, что $\wp'(z)$ не имеет никаких других периодов, кроме точек L , т.е. решетка периодов этой функции есть в точности L . ■

УТВЕРЖДЕНИЕ 21.4. *Функция $\wp(z)$ двоякопериодична с решеткой периодов L .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем, что τ_1 есть период $\wp(z)$. Из равенства $\wp'(z + \tau_1) \equiv \wp'(z)$ вытекает, в силу единственности первообразной (предложение 4.1 из п. 4.4), что

$$\wp(z + \tau_1) \equiv \wp(z) + C \quad \text{для некоторой константы } C \in \mathbb{C}.$$

Подставляя в это равенство $z = -\tau_1/2$, получим, что

$$C = \wp\left(\frac{\tau_1}{2}\right) - \wp\left(-\frac{\tau_1}{2}\right).$$

Но правая часть равна нулю в силу четности $\wp(z)$, так что $C = 0$ и τ_1 есть период $\wp(z)$. Аналогично показывается, что τ_2 также является периодом. Наконец, функция $\wp(z)$ имеет полюсы в точках решетки L (и только в них), откуда вытекает, что эта функция не имеет периодов, отличных от точек L . ■

Рассмотрим поведение функции Вейерштрасса $\wp(z)$ в фундаментальном параллелограмме Π с точки зрения общих свойств эллиптических функций, изложенных в п. 20.3.

Удобно выбрать в качестве Π параллелограмм с вершинами в точках (см. рис. 77)

$$\frac{-\tau_1 - \tau_2}{4}, \quad \frac{-\tau_1 + 3\tau_2}{4}, \quad \frac{3\tau_1 - \tau_2}{4}, \quad \frac{3\tau_1 + 3\tau_2}{4}.$$

Тогда функция $\wp(z)$ будет иметь в Π единственный 2-кратный полюс в точке 0, поэтому *порядок $\wp(z)$ равен 2, а сумма полюсов совпадает с 0*. Следовательно, по свойствам 20.4, 20.5 из п. 20.3 функция $\wp(z)$ имеет внутри Π два нуля a_1, a_2 и сумма этих нулей равна 0 по mod L . То же самое верно для любого значения $c \in \mathbb{C}$, а именно в Π найдутся ровно две точки b_1, b_2 такие, что

$$\wp(b_1) = \wp(b_2) = c \quad \text{и} \quad b_1 + b_2 \equiv 0 \pmod{L} \iff b_2 \equiv -b_1 \pmod{L}.$$

В том случае, когда $b_1 =: b$ обладает тем свойством, что

$$b \equiv -b \pmod{L} \iff 2b \equiv 0 \pmod{L},$$

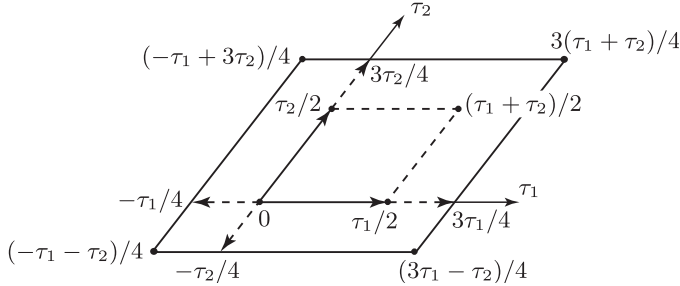


Рис. 77

обе точки b_1, b_2 сливаются в одну точку b и значение $c \in \mathbb{C}$ принимается двукратно (как в случае полюса, расположенного в 0). В фундаментальный параллелограмм попадают всего четыре таких точки b , поскольку

$$2b \equiv 0 \pmod{L} \iff 2b = n\tau_1 + m\tau_2 \iff b = n\frac{\tau_1}{2} + m\frac{\tau_2}{2}.$$

Мы выбрали параллелограмм Π так, чтобы $b = 0$ и точки

$$b = \frac{\tau_1}{2}, \frac{\tau_2}{2}, \frac{\tau_1 + \tau_2}{2} =: \frac{\tau_3}{2},$$

называемые иначе *полупериодами*, попадали внутрь Π . В нуле функция $\wp(z)$ имеет двукратный полюс, а значения $\wp(z)$ в остальных трех точках обозначим через

$$e_1 := \wp\left(\frac{\tau_1}{2}\right), \quad e_2 := \wp\left(\frac{\tau_2}{2}\right), \quad e_3 := \wp\left(\frac{\tau_3}{2}\right) = \wp\left(\frac{\tau_1 + \tau_2}{2}\right).$$

Задача. Докажите, что для любой решетки L и любого целого $n \geq 2$ существует эллиптическая функция порядка n , имеющая L своей решеткой периодов.

21.2. Описание эллиптических функций с заданной решеткой периодов. Как мы уже видели, эллиптические функции с заданной решеткой периодов образуют (вместе с константами) поле, замкнутое относительно взятия производной. Оказывается, это поле порождается функцией Вейерштрасса $\wp$ и ее производной. Точнее, имеет место следующая

ТЕОРЕМА. Пусть f — произвольная эллиптическая функция с решеткой периодов L , а $\wp$ — функция Вейерштрасса с той же решеткой периодов. Тогда найдутся рациональные функции R и R_1 такие, что

$$f = R(\wp) + R_1(\wp)\wp'.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Функцию f можно представить в виде суммы четной и нечетной функций:

$$f = g + h, \quad \text{где } g(z) := \frac{f(z) + f(-z)}{2} \quad \text{и} \quad h(z) := \frac{f(z) - f(-z)}{2}.$$

Так как производная $\wp'$ функции Вейерштрасса нечетна, то функция $g_1(z) := h(z)/\wp'(z)$ четна, и мы имеем

$$f(z) = g(z) + g_1(z)\wp'(z),$$

где g, g_1 — четные эллиптические функции. Поэтому достаточно показать, что любая четная эллиптическая функция с решеткой периодов L есть рациональная функция от $\wp$.

Отвлечемся от доказательства теоремы, чтобы установить лемму о нулях и полюсах четных эллиптических функций.

ЛЕММА. Пусть f — четная эллиптическая функция с решеткой периодов L . Пусть a — нуль порядка n функции f . Тогда

- (1) $-a$ также является нулем f порядка n ;
- (2) если $a \equiv -a \pmod{L}$, то порядок n четен.

Аналогичное утверждение верно, если a есть полюс порядка n функции f .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ. Первое утверждение вытекает из того, что k -я производная четной функции удовлетворяет соотношению

$$f^{(k)}(-z) = (-1)^k f^{(k)}(z).$$

Докажем второе утверждение. Из условия $a \equiv -a \pmod{L}$ в силу периодичности $f^{(k)}$ вытекает, что

$$f^{(k)}(-a) = f^{(k)}(a) \quad \text{для всех } k.$$

При нечетном k это вместе с предыдущей формулой дает

$$f^{(k)}(a) = 0.$$

Следовательно, первая ненулевая производная f в точке a обязательно имеет четный порядок, т.е. порядок нуля f в точке a четен. Для доказательства аналогичных утверждений в случае полюсов f нужно рассмотреть функцию $1/f$. ■

Вернемся к доказательству теоремы. Пусть f — произвольная четная эллиптическая функция с решеткой периодов L , а Π — ее фундаментальный параллелограмм. Из доказанной леммы вытекает, что множество всех нулей f в параллелограмме Π (с учетом кратности) можно разбить на пары точек вида $\{a, -a\}$ (в некоторых из этих пар точки могут совпадать по модулю L). Аналогичным образом, множество полюсов f в параллелограмме Π разбивается на пары вида $\{b, -b\}$. Выберем в каждой паре по одному представителю:

$$\begin{aligned} a_1, \dots, a_k & \text{ — представители нулей;} \\ b_1, \dots, b_k & \text{ — представители полюсов} \end{aligned}$$

(число представителей нулей и полюсов одно и то же по свойству 20.4 из п. 20.3).

Предположим сначала, что ни одна из этих точек-представителей не принадлежит L . Рассмотрим четную эллиптическую функцию

$$Q(z) = R(\wp(z)) := \frac{\prod_{j=1}^k (\wp(z) - \wp(a_j))}{\prod_{j=1}^k (\wp(z) - \wp(b_j))}.$$

Она имеет те же нули и полюсы, что и f . Действительно, $\wp(z)$ принимает каждое значение ровно 2 раза (по свойству 20.4 из п. 20.3) и при каждом $j = 1, \dots, k$ имеем: $\wp(-a_j) = \wp(a_j)$ в силу четности $\wp$. Поэтому

$$\wp(z) - \wp(a_j) = 0 \iff z \equiv \pm a_j \pmod{L},$$

т.е. множество нулей $Q(z)$ совпадает с $\{\pm a_1, \dots, \pm a_k\}$ (с учетом кратностей), и аналогично для полюсов. Следовательно, $\frac{f(z)}{Q(z)}$ есть эллиптическая функция, не имеющая нулей и полюсов в фундаментальном параллелограмме, т.е. константа, откуда

$$f(z) \equiv \text{const} \cdot R(\wp(z)).$$

В случае, если один или несколько представителей a_j, b_j попадают в узел решетки L , это рассуждение необходимо модифицировать, поскольку функция Вейерштрасса $\wp(z)$ имеет в соответствующей точке полюс. Если, например, представитель a_j попал в узел L , то в числителе $Q(z)$ нужно выбросить сомножитель с номером j . Тогда в знаменателе формулы станет на один сомножитель больше, чем в числителе, и при $z \rightarrow a_j$ предел $Q(z)$ будет равен

$$Q(z) \sim \frac{1}{\wp(z)} \rightarrow 0 \quad \text{при } z \rightarrow a_j,$$

т.е. Q имеет в точке a_j нуль, как и f . Если же представитель b_j попал в узел L , то нужно выбросить j -й сомножитель в знаменателе Q и, по тем же соображениям, функция Q будет иметь в точке b_j полюс, как и функция f . Модифицированная таким образом функция Q будет снова иметь те же нули и полюсы, что и функция f . Поэтому, как и в предыдущем случае,

$$f(z) \equiv \text{const} \cdot R(\wp(z)).$$

■

21.3. Дифференциальное уравнение для функции Вейерштрасса. Как мы только что показали, всякая четная эллиптическая функция с решеткой периодов L есть рациональная функция от $\wp(z)$. В частности, это относится к функции $(\wp'(z))^2$. Она имеет двукратные нули в полупериодах

$$\frac{\tau_1}{2}, \quad \frac{\tau_2}{2}, \quad \frac{\tau_3}{2} := \frac{\tau_1}{2} + \frac{\tau_2}{2}$$

и 6-кратный полюс в нуле. Действительно, в силу утверждения 21.3 из п. 21.1 порядок $(\wp'(z))^2$ равен 6. В нуле эта функция имеет 6-кратный полюс, а в полупериодах $a = \tau_1/2, \tau_2/2, \tau_3/2$ — нули (в силу нечетности $\wp'(z)$ и свойства $a \equiv -a \pmod{L}$). Указанные нули имеют порядок 2, поскольку являются нулями функции $\wp'(z)$ порядка 1 (напомним, см. п. 20.3, что функция Вейерштрасса $\wp(z)$ принимает в этих точках значения с кратностью 2).

Поэтому конструкция из предыдущего доказательства дает для функции $(\wp'(z))^2$ представление

$$(\wp'(z))^2 = \text{const} \cdot (\wp(z) - e_1)(\wp(z) - e_2)(\wp(z) - e_3), \quad (21.5)$$

где $e_j := \wp(\tau_j/2)$ при $j = 1, 2, 3$.

Выпишем лорановские разложения функций $\wp$ и $\wp'$ в нуле:

$$\wp(z) = z^{-2} + \dots, \quad \wp'(z) = -2z^{-3} + \dots$$

(точками обозначены неотрицательные степени z , т.е. регулярные части лорановских разложений в нуле) и подставим их в формулу (21.5). Сравнение коэффициентов при z^{-6} в обеих частях этой формулы показывает, что постоянная const в (21.5) равна 4. Таким образом, представление (21.5) можно переписать в виде

$$(\wp'(z))^2 = 4(\wp(z) - e_1)(\wp(z) - e_2)(\wp(z) - e_3). \quad (21.6)$$

Задача. Покажите, что $\text{sn}^2(z)$ есть четная эллиптическая функция с решеткой периодов $2K\mathbb{Z} + 2iK'\mathbb{Z}$ (сравните с $\text{sn}(z)$!). Покажите, что $\text{sn}^2(z) = (\wp(z) - e_2)^{-1}$, где $\wp(z)$ — отвечающая этой решетке функция Вейерштрасса.

Выведем еще одну форму дифференциального уравнения для функции Вейерштрасса. Перепишем формулу (21.6) в виде

$$(\wp'(z))^2 = 4\wp^3(z) + b\wp^2(z) + c\wp(z) + d \quad (21.7)$$

с неизвестными пока коэффициентами b, c, d . Нам предстоит их определить из условия совпадения главных частей лорановских разложений в нуле функций, стоящих в обеих частях равенства (21.7).

Чтобы выписать лорановские разложения указанных функций в нуле, воспользуемся известными разложениями в ряд функций:

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-x} &= 1 + x + x^2 + \dots, \\ \frac{1}{(1-x)^2} &= 1 + 2x + 3x^2 + \dots, \\ \frac{1}{(1-x)^3} &= 1 + 3x + 6x^2 + \dots \end{aligned}$$

(выписанные ряды сходятся при $|x| < 1$). Лорановское разложе-

ние функции Вейерштрасса $\wp(z)$ в нуле имеет вид

$$\begin{aligned}\wp(z) &= \frac{1}{z^2} + \sum_{\tau \in L'} \left[\frac{1}{(z - \tau)^2} - \frac{1}{\tau^2} \right] \\ &= \frac{1}{z^2} + \sum_{\tau \in L'} \left[\frac{1}{\tau^2} \left(1 + 2\frac{z}{\tau} + 3\frac{z^2}{\tau^2} + \cdots \right) - \frac{1}{\tau^2} \right] \\ &= \frac{1}{z^2} + 2 \left(\sum_{\tau \in L'} \frac{1}{\tau^3} \right) z + 3 \left(\sum_{\tau \in L'} \frac{1}{\tau^4} \right) z^2 + \cdots.\end{aligned}$$

Введем обозначение

$$G_m := \sum_{\tau \in L'} \frac{1}{\tau^m} \quad \text{для всех натуральных } m$$

и заметим, что $G_m = 0$ при нечетных m (так как решетка L в этом случае содержит вместе с каждой своей точкой $\tau \neq 0$ и симметричную точку $-\tau$).

Тогда лорановское разложение $\wp(z)$ в нуле примет вид

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + 3G_4 z^2 + 5G_6 z^4 + \cdots. \quad (21.8)$$

Отсюда возведением в степень получаются лорановские разложения функций $\wp^2$ и $\wp^3$ в нуле:

$$\begin{aligned}\wp^2(z) &= \frac{1}{z^4} + 6G_4 + 10G_6 z^2 + \cdots, \\ \wp^3(z) &= \frac{1}{z^6} + 9G_4 \frac{1}{z^2} + 15G_6 + \cdots.\end{aligned}$$

С другой стороны, пользуясь формулой (21.4) из п. 21.1, получим лорановское разложение функции $\wp'(z)$ в нуле:

$$\begin{aligned}\wp'(z) &= -\frac{2}{z^3} - 2 \sum_{\tau \in L'} \frac{1}{(z - \tau)^3} = -\frac{2}{z^3} - 2 \sum_{\tau \in L'} \frac{1}{\tau^3} \cdot \frac{1}{(z/\tau - 1)^3} \\ &= -\frac{2}{z^3} + 2 \sum_{\tau \in L'} \frac{1}{\tau^3} \left(1 + 3\frac{z}{\tau} + 6\frac{z^2}{\tau^2} + 10\frac{z^3}{\tau^3} + \cdots \right) \\ &= -\frac{2}{z^3} + 6G_4 z + 20G_6 z^3 + \cdots.\end{aligned}$$

Следовательно, лорановское разложение $(\wp'(z))^2$ в нуле имеет вид

$$(\wp'(z))^2 = \frac{4}{z^6} - 24\frac{G_4}{z^2} - 80G_6 + \dots.$$

Сравним его с лорановским разложением функции

$$4\wp^3(z) + b\wp^2(z) + c\wp(z) + d,$$

которое имеет вид

$$\frac{4}{z^6} + \frac{b}{z^4} + (36G_4 + c)\frac{1}{z^2} + (60G_6 + 6bG_4 + d) + \dots,$$

и найдем отсюда значения констант b, c, d :

$$\begin{aligned} b &= 0, \\ 36G_4 + c &= -24G_4 \implies c = -60G_4, \\ 60G_6 + 6bG_4 + d &= -80G_6 \implies d = -140G_6. \end{aligned}$$

Введем дополнительно обозначения:

$$\begin{aligned} g_2(L) = g_2 &:= 60G_4 = 60 \sum_{\tau \in L'} \frac{1}{\tau^4}, \\ g_3(L) = g_3 &:= 140G_6 = 140 \sum_{\tau \in L'} \frac{1}{\tau^6}. \end{aligned}$$

Тогда уравнение (21.7) примет окончательный вид:

$$(\wp'(z))^2 = 4\wp^3(z) - g_2\wp(z) - g_3. \quad (21.9)$$

Приравнявая правые части уравнений (21.6) и (21.9) и пользуясь тем, что область значений функции Вейерштрасса $\{\wp(z) : z \in \mathbb{C} \setminus L\}$ есть вся комплексная плоскость $\mathbb{C}$ (по свойству 20.4 из п. 20.3), а также формулами Виета, получаем, что

$$\begin{cases} e_1 + e_2 + e_3 = 0, \\ e_1e_2 + e_1e_3 + e_2e_3 = -\frac{g_2}{4}, \\ e_1e_2e_3 = \frac{g_3}{4}. \end{cases} \quad (21.10)$$

Лекция 22. Реализация тора в виде кубической кривой в $\mathbb{C}^2$

Дифференциальное уравнение (21.9) из п. 21.3 для функции Вейерштрасса показывает, что точки $(\wp(z), \wp'(z))$ лежат на кубической кривой C в 2-мерном комплексном пространстве $\mathbb{C}^2$, задаваемой уравнением

$$C = C_L := \{(u, v) \in \mathbb{C}^2 : v^2 = 4u^3 - g_2u - g_3\},$$

где $g_2 = g_2(L) = 60G_4(L)$, $g_3 = g_3(L) = 140G_6(L)$. С другой стороны, функции $\wp(z)$ и $\wp'(z)$, будучи двоякопериодическими относительно решетки L , определены на торе $T = T_L := \mathbb{C}/L$. Тем самым, отображение, задаваемое функциями $(\wp(z), \wp'(z))$, связывает тор T_L с кубической кривой C_L . Это отображение целиком определяется заданием решетки L на комплексной плоскости. В данной лекции мы подробно изучим свойства этого замечательного отображения. Начнем с точных определений, относящихся к тору T и кубической кривой C .

22.1. Определения тора и кубической кривой в $\mathbb{C}^2$. Каждой решетке L на комплексной плоскости $\mathbb{C}$ отвечает *комплексный тор*

$$T = T_L := \mathbb{C}/L,$$

являющийся одномерным комплексным многообразием. По определению T есть множество классов эквивалентности точек комплексной плоскости $\mathbb{C}$ относительно отношения

$$z_1 \sim z_2 \iff z_1 - z_2 \in L.$$

Локальная карта в малой окрестности произвольной точки $\zeta \in T$, с помощью которой вводится локальная координата в точке ζ (см. п. 12.5), задается тождественным отображением этой окрестности на себя. Проекция $\pi: \mathbb{C} \rightarrow T$, сопоставляющая каждой точке плоскости отвечающий ей класс эквивалентности в $T = \mathbb{C}/L$, есть неразветвленное голоморфное накрытие в смысле п. 12.6.

Тор $T = T_L$ является естественной областью определения для эллиптических функций с решеткой периодов L . Более точно, *мероморфная функция $f: \mathbb{C} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ эллиптика с решеткой периодов $L \iff$ существует голоморфное отображение $\Phi: T_L \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$*

такое, что $f = \Phi \circ \pi$:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \xrightarrow{f} & \overline{\mathbb{C}} \\ & \searrow \pi \quad \nearrow \Phi & \\ & T_L & \end{array}$$

Сопоставим теперь решетке $L \subset \mathbb{C}$ комплексную кубическую кривую

$$C = C_L := \{(u, v) \in \mathbb{C}^2 : v^2 = 4u^3 - g_2u - g_3\},$$

где

$$g_2 = g_2(L) = 60G_4(L), \quad g_3 = g_3(L) = 140G_6(L).$$

Заметим, что вместе с каждой точкой (u, v) кривая C содержит и симметричную точку $(u, -v)$.

Чтобы задать структуру одномерного комплексного многообразия на $C = C_L$, рассмотрим аналитическую функцию

$$v = \sqrt{P(u)} \quad \text{на } \mathbb{C} \setminus \{e_1, e_2, e_3\},$$

где

$$P(u) := 4u^3 - g_2u - g_3 = 4(u - e_1)(u - e_2)(u - e_3)$$

(см. формулы (21.6), (21.9) из п. 21.3). В окрестности любой точки $u_0 \in \mathbb{C} \setminus \{e_1, e_2, e_3\}$ указанная функция распадается (по теореме о монодромии) на две голоморфных ветви, так что пересечение

$$C \cap \{(u, v) \in \mathbb{C}^2 : |u - u_0| < \varepsilon\}$$

является объединением графиков этих ветвей (см. рис. 78). Поэтому в окрестности каждой из двух точек $(u_0, \pm v_0) \in C$, лежащих над точкой $u_0 \in \mathbb{C} \setminus \{e_1, e_2, e_3\}$, множество C однозначно (и непрерывно) проектируется на плоскость переменной u . Эту проекцию мы и выбираем в качестве локальной карты в точках $(u_0, \pm v_0) \in C$.

Рассмотрим теперь оставшиеся точки C (которые проектируются в точки $u_0 = e_1, e_2, e_3$). Заметим, прежде всего, что для любой решетки L числа e_1, e_2, e_3 попарно различны. Действительно, допустим, напротив, что одно из значений e_j совпадает с другим значением e_k . Тогда функция $\wp(z)$ будет принимать значение $e_j = e_k$ в фундаментальном параллелограмме не менее четырех раз с учетом кратностей, тогда как ее порядок равен 2. Противоречие.

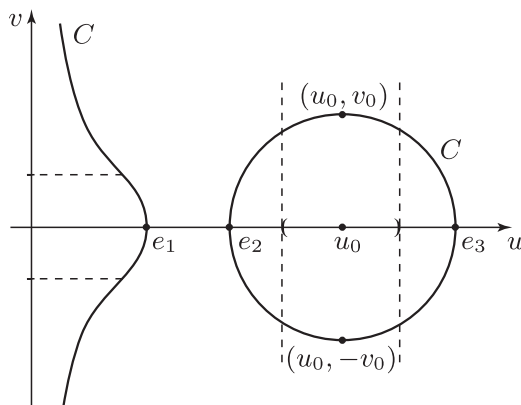


Рис. 78

Следовательно, $P'(e_j) \neq 0$, т.е. функция $v = P(u)$ обратима в окрестности точки $u = e_j$ (см. п. 14.2), а значит, множество C в окрестности каждой из трех оставшихся точек $(e_j, 0) \in C$, $j = 1, 2, 3$, однозначно проектируется на плоскость переменной v . Эта проекция задает локальные карты в указанных точках. (С помощью аналогичного рассуждения можно было бы избежать ссылки на теорему о монодромии в предыдущем абзаце).

Проверку того, что построенная система локальных карт действительно задает на C_L структуру одномерного комплексного многообразия (т.е. удовлетворяет условию определения 12.1 из п. 12.5), оставляем читателю в качестве упражнения.

ЗАДАЧА. Покажите, что ни один из указанных приемов не позволяет ввести на подмножествах $\{v^2 = u^3\}$ и $\{v^2 = u^2(u - 1)\}$ пространства $\mathbb{C}^2$ структуру одномерного комплексного многообразия вблизи точки $(0, 0)$.

22.2. Параметризация кубической кривой с помощью функции Вейерштрасса. Построенные в предыдущем пункте локальные карты на кривой C_L задают на ней локальную параметризацию (комплексным параметром, изменяющимся на комплексной плоскости). Однако отображение $z \mapsto (\wp(z), \wp'(z))$ позволяет ввести на C_L и глобальную параметризацию. Точнее, справедливо следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. *Отображение*

$$\gamma: T_L \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}^2,$$

задаваемое формулой

$$z \mapsto \gamma(z) = (\wp(z), \wp'(z)),$$

является биголоморфизмом проколтого тора $T_L \setminus \{0\}$ на кубическую кривую C_L .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. То, что образ отображения γ содержится в C_L , вытекает из формулы (21.9) в п. 21.3. С другой стороны, голоморфность γ , рассматриваемого как отображение $T_L \setminus \{0\} \rightarrow C_L$, следует из описания локальных карт в п. 22.1. Поскольку биективное голоморфное отображение одномерных комплексных многообразий является биголоморфизмом (это доказывается так же, как для плоских областей в замечании 14.3 из п. 14.2), осталось только показать, что отображение $\gamma: T_L \setminus \{0\} \rightarrow C_L$ биективно. Иными словами, для каждой точки $(u_0, v_0) \in C_L$ существует единственная точка $z \in T_L \setminus \{0\}$ такая, что

$$\gamma(z) = (u_0, v_0) \iff \wp(z) = u_0, \wp'(z) = v_0.$$

Пусть сначала $v_0 = 0$, т.е. u_0 есть один из трех корней e_1, e_2, e_3 уравнения $P(u) = 0$. Значение $u = e_j$ принимается функцией $u = \wp(z)$ в единственной точке $z = \tau_j/2$ фундаментального параллелограмма Π , но с кратностью 2, поэтому $\wp'(\tau_j/2) = 0$. Следовательно, $z = \tau_j/2$ есть единственное решение уравнения $\gamma(z) = (e_j, 0)$ в параллелограмме Π (или, эквивалентно, на торе T_L).

Пусть теперь $v_0 \neq 0$, т.е. $u_0 \in \mathbb{C} \setminus \{e_1, e_2, e_3\}$. Тогда значение $u = u_0$ принимается функцией $u = \wp(z)$ ровно в двух различных точках z_1, z_2 параллелограмма Π (оба раза с кратностью 1), причем

$$z_2 \equiv -z_1 \pmod{L} \quad \text{и} \quad \wp'(z_2) = -\wp'(z_1) \neq 0.$$

Тем самым,

$$u_0 = \wp(z_1) = \wp(z_2), \quad v_0^2 = 4u_0^3 - g_2u_0 - g_3 = [\wp'(z_1)]^2 = [\wp'(z_2)]^2.$$

Таким образом, каждая из точек $(u_0, \pm v_0)$ кривой C_L , лежащих над точкой u_0 плоскости u , имеет единственный прообраз (а именно z_1 или z_2) при отображении γ . ■

ЗАМЕЧАНИЕ 22.1. Можно продолжить построенное отображение γ в точку $z = 0$, если рассмотреть замыкание $\overline{C}$ кубической кривой $C \subset \mathbb{C}^2$ в комплексном проективном пространстве $\mathbb{C}P^2 \supset \mathbb{C}^2$. Точке $z = 0$ будет отвечать при этом (единственная) точка $c_0 \in \overline{C}$, лежащая на бесконечно удаленной комплексной прямой $L_\infty \subset \mathbb{C}P^2$. Отметим без доказательства, что проекция $\overline{C}$ на L_∞ однозначна в окрестности точки c_0 (так как $\overline{C}$ и L_∞ касаются друг друга в точке c_0 как гладкие 2-мерные подмногообразия $\mathbb{C}P^2$) и может быть взята за локальную карту на $\overline{C}$ в окрестности этой точки. Продолженное отображение γ является биголоморфизмом тора T_L на кубическую кривую $\overline{C}_L \subset \mathbb{C}P^2$.

ЗАМЕЧАНИЕ 22.2. Отметим еще, что метод изучения кубических кривых вида $\{v^2 = 4u^3 - \gamma_2 u - \gamma_3\}$ с помощью функции Вейерштрасса применим к любым кубическим кривым. Точнее, для любых $\gamma_2, \gamma_3 \in \mathbb{C}$, удовлетворяющих условию $\gamma_2^3 - 27\gamma_3^2 \neq 0$ (которое означает, что все три корня полинома $P(u) = 4u^3 - \gamma_2 u - \gamma_3$ различны), найдется решетка L , для которой $g_2(L) = \gamma_2$, $g_3(L) = \gamma_3$.

ЗАДАЧА. Пусть $0 < k < 1$. Определим числа $K, K' > 0$ так же, как в утверждении 19.2 из п. 19.1, и рассмотрим решетку $L := 4K\mathbb{Z} + 2iK'\mathbb{Z}$. Опишите структуру одномерного комплексного многообразия на кривой 4-й степени

$$C'_L := \{(u, v) \in \mathbb{C}^2 : v^2 = (1 - u^2)(1 - k^2 u^2)\}$$

и покажите, что отображение $z \mapsto (\text{sn}(z), \text{sn}'(z))$ задает биголоморфизм тора T_L с двумя выколотыми точками (полюсами $\text{sn}(z)$) на кривую C'_L .

Указание: см. уравнение (20.2) из п. 20.1.

22.3. Сложение точек на кубической кривой. Сложение чисел на комплексной плоскости порождает операцию сложения точек на торе, а она с помощью отображения γ индуцирует операцию сложения точек кубической кривой. Найдем явную формулу для этой операции.

Пусть точки P_1, P_2 кубической кривой C отвечают точкам z_1, z_2 фундаментального параллелограмма Π , т.е.

$$P_1 = (\wp(z_1), \wp'(z_1)), \quad P_2 = (\wp(z_2), \wp'(z_2)).$$

Проведем через них комплексную прямую $v = au + b$ (см. рис. 79), так что

$$\wp'(z_j) = a\wp(z_j) + b \quad \text{при } j = 1, 2.$$

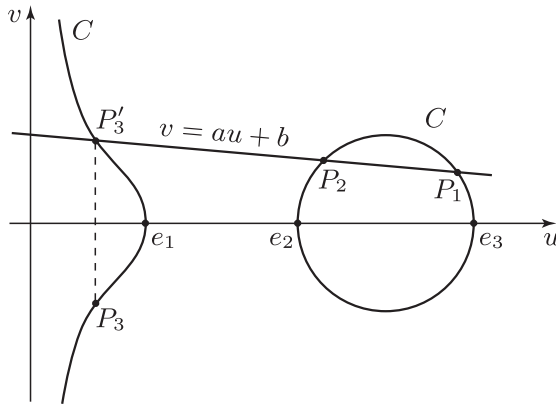


Рис. 79

Эллиптическая функция $\wp'(z) - a\wp(z) - b$ имеет в фундаментальном параллелограмме Π единственный полюс $z = 0$ кратности 3. Поэтому (см. свойство 20.4 из п. 20.3) уравнение

$$\wp'(z) - a\wp(z) - b = 0$$

имеет в Π ровно 3 корня (с учетом кратности), а именно z_1 , z_2 и еще один корень z_3 (который может совпадать с z_1 или z_2). Пользуясь свойством 20.5 из п. 20.3 и тем, что сумма полюсов функции $\wp'(z) - a\wp(z) - b$ равна нулю, получаем, что

$$z_1 + z_2 + z_3 \equiv 0 \pmod{L}, \quad \text{т.е.} \quad z_3 \equiv -(z_1 + z_2) \pmod{L}.$$

Следовательно, третья точка пересечения прямой $v = au + b$ с кубической кривой C имеет вид

$$\begin{aligned} P'_3 &= (\wp(z_3), \wp'(z_3)) = (\wp(-z_1 - z_2), \wp'(-z_1 - z_2)) \\ &= (\wp(z_1 + z_2), -\wp'(z_1 + z_2)). \end{aligned}$$

Иными словами, точка $P_3 := (\wp(z_1 + z_2), \wp'(z_1 + z_2))$, отвечающая сумме $z_1 + z_2$, “симметрична” точке пересечения P'_3 относительно оси u .

УТВЕРЖДЕНИЕ. Значение $\wp(z_1 + z_2)$ выражается через $\wp(z_1)$ и $\wp(z_2)$ алгебраической формулой (см. формулу (22.1) ниже).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что все три точки $z_1, z_2, z_1 + z_2 \in T_L$ различны и ни одна из них не совпадает с 0. Тогда, согласно предыдущему пункту, значения

$$u_1 = \wp(z_1), \quad u_2 = \wp(z_2), \quad u_3 = \wp(z_1 + z_2)$$

являются тремя (различными) корнями уравнения

$$(au + b)^2 = 4u^3 - g_2u - g_3.$$

Выражая коэффициент при u^2 в этом уравнении через его корни по теореме Виета, получаем, что

$$\frac{a^2}{4} = \wp(z_1) + \wp(z_2) + \wp(z_1 + z_2).$$

При этом параметр a находится из условия

$$\left. \begin{aligned} \wp'(z_1) &= a\wp(z_1) + b \\ \wp'(z_2) &= a\wp(z_2) + b \end{aligned} \right\} \iff a = \frac{\wp'(z_1) - \wp'(z_2)}{\wp(z_1) - \wp(z_2)}.$$

Отсюда

$$\wp(z_1 + z_2) = -\wp(z_1) - \wp(z_2) + \frac{1}{4} \left(\frac{\wp'(z_1) - \wp'(z_2)}{\wp(z_1) - \wp(z_2)} \right)^2, \quad (22.1)$$

т.е. $\wp(z_1 + z_2)$ является рациональной функцией от $\wp(z_j), \wp'(z_j)$, $j = 1, 2$. Но

$$\wp'(z) = \sqrt{4\wp^3(z) - g_2\wp(z) - g_3},$$

так что $\wp'(z_j)$ выражается через $\wp(z_j)$ алгебраической формулой. ■

ЗАМЕЧАНИЕ. Алгебраическая формула, выражающая функцию $\wp(z_1 + z_2)$ через $\wp(z_1)$ и $\wp(z_2)$, получена нами в предположении, что $z_1 \not\equiv z_2 \pmod{L}$. Чтобы получить формулу сложения при $z_1 \equiv z_2 \pmod{L}$, перейдем в формуле (22.1) к пределу при $z_2 \rightarrow z_1 =: z$. Получим

$$\wp(2z) = -2\wp(z) + \frac{1}{4} \left(\frac{\wp''(z)}{\wp'(z)} \right)^2,$$

что дает алгебраическое выражение для $\wp(2z)$ через $\wp(z)$, поскольку функция $\wp''(z)$ удовлетворяет уравнению

$$2\wp''(z) = 12\wp^2(z) - g_2.$$

ЗАДАЧА. Докажите формулу сложения для эллиптического синуса:

$$\operatorname{sn}(z_1 + z_2) = \frac{\operatorname{sn}(z_1) \operatorname{sn}'(z_2) + \operatorname{sn}(z_2) \operatorname{sn}'(z_1)}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2(z_1) \operatorname{sn}^2(z_2)}.$$

Указание: пусть точки

$$P_1, P_2 \in C' := \{(u, v) \in \mathbb{C}^2 : v^2 = (1 - u^2)(1 - k^2 u^2)\}$$

отвечают точкам z_1, z_2 при отображении $z \mapsto (\operatorname{sn}(z), \operatorname{sn}'(z))$. Подберем числа $a, b \in \mathbb{C}$ так, чтобы парабола $v = 1 + au + bu^2$ проходила через точки P_1, P_2 , и обозначим четвертую точку пересечения этой параболы с C' (помимо P_1, P_2 и $(0, 1)$) через P'_3 . Тогда, как и выше,

$$z_1 + z_2 + z_3 \equiv 0 \pmod{L}.$$

Искомая формула сложения получится отсюда, если выписать формулы Виета для коэффициентов при u^3 и u в получившемся уравнении 4-й степени.

Лекция 23. Модулярная функция и теорема Пикара

23.1. Построение модулярной функции. Эллиптические функции, с которыми мы познакомились в предыдущих лекциях, представляют собой класс мероморфных функций на $\mathbb{C}$, инвариантных относительно сдвигов комплексной плоскости $\mathbb{C}$ на периоды вида

$$z \mapsto z + n\tau_1 + m\tau_2, \quad \text{где } n, m \in \mathbb{Z}.$$

Иными словами, это функции, инвариантные относительно дискретной подгруппы периодов $T = \{\tau\}$ в аддитивной группе $\mathbb{C}$. Модулярная функция, изучаемая в данном параграфе, дает другой пример функций подобного рода. А именно функция $\mu: U \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$, которая будет построена при доказательстве нижеследующей теоремы, голоморфна в единичном круге U и инвариантна относительно бесконечной дискретной подгруппы в группе $\text{Aut } U$ автоморфизмов единичного круга.

При построении эллиптического синуса и других эллиптических функций мы многократно пользовались аналитическим продолжением с помощью симметрии относительно отрезков прямой — симметрии, тесно связанной с евклидовой геометрией комплексной плоскости. В отличие от комплексной плоскости $\mathbb{C}$, естественной геометрией единичного круга U является гиперболическая геометрия, роль отрезков в которой играют дуги окружностей, ортогональных единичной окружности. При построении модулярной функции мы снова воспользуемся приемом аналитического продолжения с помощью симметрии, но на этот раз гиперболической — относительно дуг окружностей, ортогональных ∂U .

Прежде чем переходить к построению модулярной функции, напомним определение и нужные нам свойства гиперболических треугольников. Выберем две произвольные различные точки A и B на единичной окружности ∂U и рассмотрим лежащую в U дугу окружности, проходящей через точки A , B и ортогональной к ∂U в этих точках. Обозначим указанную дугу (которая определяется единственным образом точками A , B) через $\widehat{AB}$ и будем называть ее *гиперболической дугой*, соединяющей точки A и B . (Существование и единственность гиперболической дуги проще всего усмотреть, отображив U дробно-линейно на верхнюю

полуплоскость D_+ так, чтобы точка A перешла в ∞ .) Если теперь A, B, C — три произвольные попарно различные точки на окружности ∂U , то гиперболические дуги $\widehat{AB}, \widehat{BC}, \widehat{CA}$ не имеют общих точек, кроме концов (в которых указанные дуги касаются друг друга), и ограничивают область $\Delta \subset U$, которая и называется *гиперболическим треугольником*. (Отмеченное свойство гиперболических дуг $\widehat{AB}, \widehat{BC}, \widehat{CA}$ также становится более наглядным, если отобразить U на верхнюю полуплоскость D_+ ; при этом две из трех дуг превращаются в вертикальные лучи, а треугольник Δ превращается в вертикальную полуполосу Δ' , ограниченную снизу полуокружностью $\widehat{B'C'}$, имеющей отрезок $[B', C']$ вещественной оси своим диаметром, см. рис. 80.)

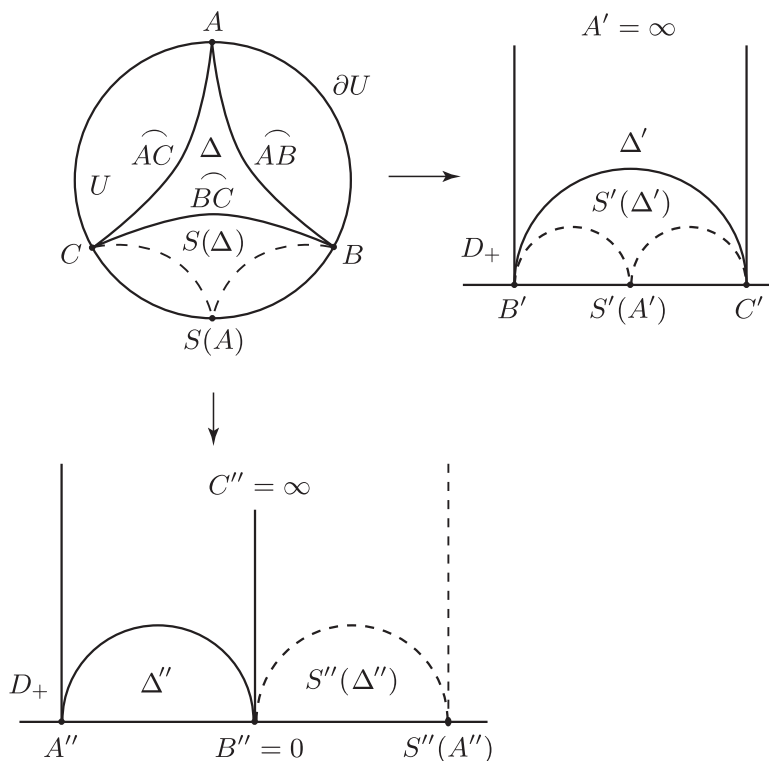


Рис. 80

Рассмотрим теперь симметрию S относительно одной из сторон, например $\widehat{BC}$, гиперболического треугольника Δ . Заметим, что при такой симметрии образ $S(A)$ вершины A треугольника Δ снова лежит на ∂U , а образ $S(\Delta)$ самого треугольника Δ содержится в U и является гиперболическим треугольником, не пересекающимся с Δ . Действительно, после дробно-линейного преобразования $U \rightarrow D_+$, переводящего точки B, C в $0, \infty$ соответственно, дуга $\widehat{BC}$ перейдет в вертикальный луч, перпендикулярный вещественной оси в точке B'' , а единичная окружность ∂U — в вещественную ось (см. рис. 80). Симметрии S относительно дуги $\widehat{BC}$ будет отвечать в образе этого дробно-линейного преобразования симметрия S'' относительно указанного вертикального луча. При этом отмеченные свойства симметрии S становятся очевидными.

Перейдем теперь собственно к построению *модулярной функции*. Фиксируем произвольный гиперболический треугольник Δ_0 в U . По теоремам Римана и Каратеодори существует непрерывное (и даже гомеоморфное) отображение

$$\mu: \overline{\Delta}_0 \rightarrow \overline{D}_+,$$

осуществляющее биголоморфизм области Δ_0 на верхнюю полуплоскость D_+ и переводящее вершины треугольника Δ_0 в точки $0, 1, \infty$ соответственно. Пользуясь принципом симметрии, продолжим отображение $\mu: \overline{\Delta}_0 \rightarrow \overline{D}_+$ на треугольники $\Delta_1^1, \Delta_1^2, \Delta_1^3$, симметричные треугольнику Δ_0 относительно его сторон (см. рис. 81). Полученные продолжения

$$\mu: \overline{\Delta}_1^i \rightarrow \overline{D}_-, \quad i = 1, 2, 3,$$

конформно отображают треугольники Δ_1^i на нижнюю полуплоскость D_- так, что вершины этих треугольников переходят снова в точки $0, 1, \infty$. Ввиду отмеченных выше свойств гиперболических треугольников при симметрии относительно гиперболических дуг, этот процесс можно повторить и голоморфно продолжить отображение μ на гиперболические треугольники Δ_2^j , симметричные треугольникам Δ_1^i относительно их сторон (здесь j принимает значения от 1 до 6), и т.д.

Полученные таким образом треугольники Δ_k^i , $k = 0, 1, 2, \dots$, *попарно не пересекаются*, так как по построению множества их

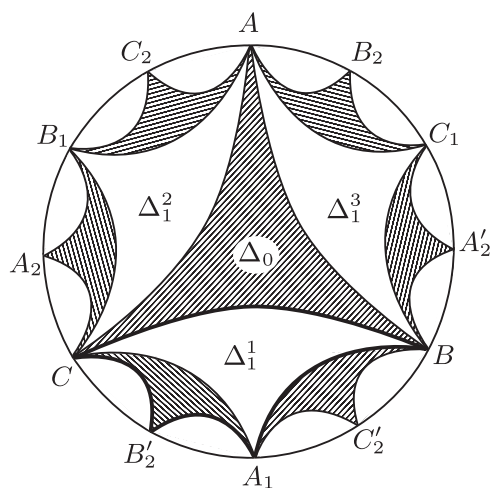


Рис. 81

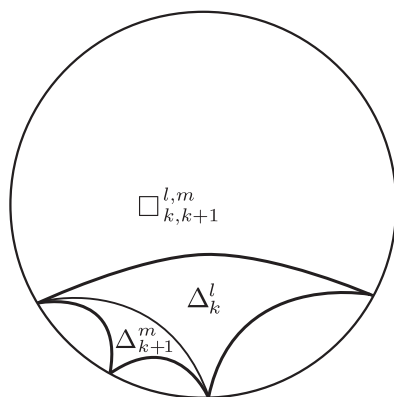


Рис. 82

вершин не перемежаются. Отметим еще, что продолжение μ на треугольники Δ_k^l обладает следующим важным свойством: оно конформно отображает область $\square_{k,k+1}^{l,m}$ (гиперболический четырехугольник), полученную объединением любых двух смежных треугольников Δ_k^l , Δ_{k+1}^m и их общей стороны (см. рис. 82), на объединение верхней и нижней полуплоскостей с одним из отрезков $(-\infty, 0)$, $(0, 1)$ или $(1, +\infty)$ расширенной вещественной оси.

Обозначим через $\Omega_n \subset U$ область, полученную на n -м шаге указанного процесса. Область Ω_n состоит из всех треугольников Δ_k^l , $0 \leq k \leq n$, с добавленными к ним отрезками их смежных границ. Множества Ω_n открыты и возрастают: $\Omega_n \subset \Omega_{n+1}$, а их объединение составляет область

$$\Omega := \bigcup_{n=0}^{\infty} \Omega_n \subset U.$$

Описанный выше процесс аналитического продолжения задает голоморфную функцию $\mu(z)$ на области Ω со значениями в $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. *Область Ω совпадает со всем единичным кругом U , а функция μ задает неразветвленное голоморфное накрытие $\mu: U \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1°. Для доказательства равенства $\Omega = U$ нам понадобится лемма о свойствах гиперболических треугольников Δ_k^l , $k = 0, 1, 2, \dots$, составляющих область Ω . Совокупность всех таких треугольников назовем для краткости *сетью* и докажем, что треугольники сети обладают следующим свойством.

ЛЕММА. *Образ любого треугольника сети при симметрии относительно любой из сторон любого другого треугольника сети есть снова треугольник сети.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ. Назовем *цепочкой* всякую конечную упорядоченную последовательность непересекающихся гиперболических треугольников, в которой любые два соседних треугольника имеют общую сторону и симметричны друг другу относительно нее. Из построения треугольников Δ_k^l ясно, что гиперболический треугольник принадлежит сети тогда и только тогда, когда его можно соединить цепочкой с некоторым (и тогда с любым) треугольником сети. Кроме того, индукцией по числу треугольников цепочки легко установить, что если Γ есть сторона

одного из треугольников цепочки, не являющаяся общей стороной никаких двух треугольников цепочки, то вся цепочка лежит по одну сторону от окружности, частью которой является Γ .

Рассмотрим образ $S(\Delta_k^l)$ треугольника Δ_k^l при симметрии S относительно некоторой стороны γ треугольника $\Delta_{k'}^{l'}$. По предыдущему абзацу Δ_k^l можно соединить цепочкой с $\Delta_{k'}^{l'}$. Будем считать, что γ не есть общая сторона $\Delta_{k'}^{l'}$ и предыдущего треугольника цепочки. (Если это не так, то заменим $\Delta_{k'}^{l'}$ на этот предыдущий треугольник.) Тогда по сказанному в конце предыдущего абзаца вся цепочка лежит по одну сторону от той окружности, частью которой является γ . Поэтому образ этой цепочки при симметрии S также является цепочкой, соединяющей треугольник $\Delta_{k'}^{l'}$ (по условию принадлежащий сети) с треугольником $S(\Delta_k^l)$. Тем самым, последний также принадлежит сети. ■

Вернемся к доказательству равенства $\Omega = U$. С помощью дробно-линейного отображения отождествим круг U с верхней полуплоскостью D_+ так, чтобы треугольник Δ_0 стал вертикальной полуполосой Δ'_0 , основанием которой служит полуокружность, имеющая отрезок $[0, 1] \subset \mathbb{R}$ своим диаметром. Отражая Δ'_0 относительно вертикальных сторон и повторяя этот процесс, видим, что все сдвиги Δ'_0 на целые числа суть треугольники сети. Тем самым, образ Ω' области Ω в D_+ содержит все такие треугольники и разделяющие их вертикальные стороны, т.е. имеем включение

$$\Omega' \supset D_0 := D_+ \setminus \bigcup_{\alpha \in \mathbb{Z}} B_\alpha^{(0)},$$

где $B_\alpha^{(0)}$ есть замкнутый полукруг с диаметром $[\alpha, \alpha + 1] \subset \mathbb{R}$ (см. рис. 83 а). Граница области D_0 состоит из полуокружностей с диаметрами на $\mathbb{R}$.

Для $n = 1, 2, \dots$ определим по индукции области $D_n \subset D_+$, полагая D_n равной объединению области D_{n-1} и ее образов при симметрии относительно всех полуокружностей, составляющих границу D_{n-1} , включая сами эти полуокружности (без концевых точек). Тогда по лемме имеем

$$\Omega' \supset D_n \quad \text{для всех } n = 1, 2, \dots$$

Поэтому остается лишь показать, что объединение $\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n$ сов-

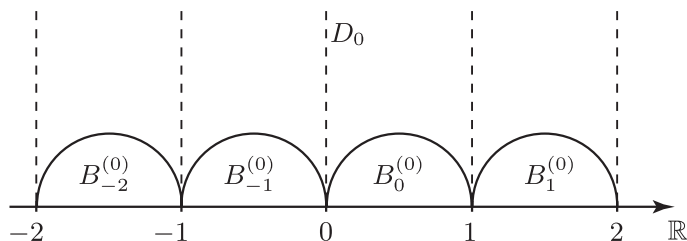


Рис. 83 а

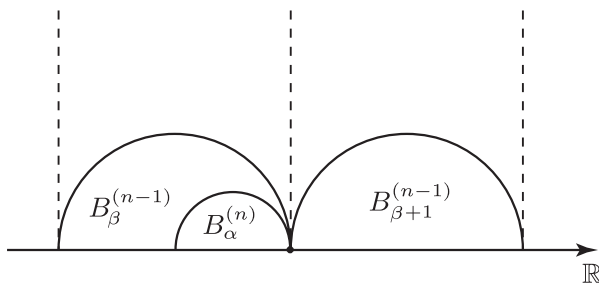


Рис. 83 б

падает со всей полуплоскостью D_+ . Представим D_n в виде

$$D_n = D_+ \setminus \bigcup_{\alpha \in \mathbb{Z}} B_{\alpha}^{(n)},$$

где $B_{\alpha}^{(n)}$ — замкнутые полукруги с диаметрами на $\mathbb{R}$, и положим

$$r_n := \sup_{\alpha \in \mathbb{Z}} \text{diam } B_{\alpha}^{(n)}.$$

Тогда имеем $r_n \leq \frac{1}{2}r_{n-1}$, так как диаметр каждого $B_{\alpha}^{(n)}$ лежит на радиусе некоторого $B_{\beta}^{(n-1)}$ и, следовательно, не превосходит r_{n-1} (см. рис. 83 б). Получаем, что $r_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, откуда и вытекает доказываемое равенство

$$D_+ = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n.$$

2°. Докажем, что построенная выше функция $\mu: \Omega \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ является неразветвленным голоморфным накрытием. Согласно

определению голоморфного неразветвленного накрытия из п. 12.6 для этого нужно проверить, что:

- (1) μ сюръективно отображает Ω на $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$;
- (2) у каждой точки $w \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ найдется окрестность V_w , прообраз которой $\mu^{-1}(V_w)$ есть объединение

$$\mu^{-1}(V_w) = \bigcup_{j \in J} U_j$$

непересекающихся открытых подмножеств $U_j \subset \Omega$, которые биголоморфно отображаются μ на V_w .

Сюръективность μ ясна из построения. Действительно, $\mu(\Delta_0)$ есть открытая верхняя полуплоскость D_+ , $\mu(\Delta_1^i)$ есть открытая нижняя полуплоскость D_- для любого $i = 1, 2, 3$, а множество $\partial\Delta_0 \setminus \{A, B, C\}$ (объединение сторон треугольника Δ_0 , исключая его вершины) переходит при отображении μ в объединение интервалов $(-\infty, 0)$, $(0, 1)$ и $(1, +\infty)$ вещественной оси. Тем самым, объединение указанных четырех треугольников и их общих сторон при отображении μ покрывает всю область $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$.

Существование окрестности V_w для точек $w \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$. Пусть сначала $w \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} = D_+ \cup D_-$. Предположим, для определенности, что $w \in D_+$. В этом случае существование окрестности V_w вытекает из того, что прообраз $\mu^{-1}(w)$ принадлежит объединению гиперболических треугольников Δ_k^l , которые попарно не пересекаются между собой, и ограничение μ на каждый из этих треугольников конформно отображает его на D_+ (случай $w \in D_-$ рассматривается аналогично). Пусть, далее, точка w принадлежит $\mathbb{R} \setminus \{0, 1\} = (0, 1) \cup (1, +\infty) \cup (-\infty, 0)$. Для определенности предположим, что $w \in (0, 1)$. В этом случае существование окрестности V_w вытекает из того, что прообраз $\mu^{-1}(w)$ принадлежит объединению гиперболических четырехугольников $\square_{k,k+1}^{l,m}$, которые также попарно не пересекаются, и ограничение μ на общую сторону составляющих $\square_{k,k+1}^{l,m}$ гиперболических треугольников Δ_k^l и Δ_{k+1}^m гомеоморфно отображает ее на интервал $(0, 1)$. Случаи $w \in (1, +\infty)$ и $w \in (-\infty, 0)$ рассматриваются аналогично. ■

В заключение остановимся более подробно на упомянутом в начале *свойстве инвариантности модулярной функции*. Как было указано выше, симметрии относительно гиперболических дуг

переводят единичный круг U на себя. В частности, преобразования $U \rightarrow U$, задаваемые композициями четного числа симметрий относительно сторон треугольников Δ_k^l , являются конформными отображениями U на себя и, следовательно, дробно-линейными автоморфизмами U . Они образуют подгруппу Λ в группе всех автоморфизмов $\text{Aut } U$ единичного круга. Покажем, что *модулярная функция инвариантна относительно преобразований из Λ* . Действительно, пусть z — произвольная точка U . Тогда действию произвольного преобразования $\lambda \in \Lambda$ на z будет отвечать в образе μ четное число отражений точки $\mu(z)$ относительно вещественной оси, откуда $\mu(\lambda z) = \mu(z)$.

Задачи. (1) Проверьте следующее утверждение, использованное при построении модулярной функции: два гиперболических треугольника имеют непустое пересечение тогда и только тогда, когда их вершины перемежаются.

(2) Как и в доказательстве равенства $\Omega = U$, отождествим круг U с верхней полуплоскостью $D_+ = \{\zeta \in \mathbb{C} : \text{Im } \zeta > 0\}$ так, чтобы выполнялось равенство $\Delta_0 = \{\zeta \in D_+ : 0 < \text{Re } \zeta < 1, |2\zeta - 1| > 1\}$. Покажите, что в этих обозначениях группа Λ порождается преобразованиями

$$\lambda_1(\zeta) = \zeta + 2 \quad \text{и} \quad \lambda_2(\zeta) = \frac{\zeta}{2\zeta + 1}$$

и что она состоит из всех дробно-линейных отображений

$$\lambda(\zeta) = \frac{a\zeta + b}{c\zeta + d}$$

таких, что $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$, a, d нечетны, b, c четны и $ad - bc = 1$.

23.2. Теорема Пикара.

ТЕОРЕМА ПИКАРА. *Целая функция, отличная от постоянной, принимает все значения из $\mathbb{C}$, за исключением, быть может, одного.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим, напротив, что целая функция f не принимает двух значений $a, b \in \mathbb{C}$. Заменяя $f(z)$ на целую функцию

$$g(z) := \frac{f(z) - a}{b - a},$$

можно считать, что $a = 0$, $b = 1$.

Рассмотрим неразветвленное голоморфное накрытие $\mu: U \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ из предыдущей теоремы. Как было отмечено в п. 12.6

(примените конструкцию из замечания в п. 12.6 к $\Phi \equiv \text{Id}$ и $\pi \equiv \mu$), каждый элемент обратной функции μ^{-1} допускает продолжение вдоль любого непрерывного пути в $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$. Так как функция g не принимает значений 0, 1, то в качестве такого пути можно взять любой путь вида $g \circ \gamma$, где $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ — произвольный путь в $\mathbb{C}$. Поэтому каждый элемент функции $\mu^{-1} \circ g$ допускает продолжение вдоль любого пути в $\mathbb{C}$, и по теореме о монодромии (п. 10.6) это продолжение задает некоторую (однозначную) голоморфную функцию $F \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$. По построению все значения F лежат в единичном круге U , откуда следует по теореме Лиувилля, что $F \equiv \text{const}$. Так как $g = \mu \circ F$ всюду на $\mathbb{C}$, то функция g также является константой вопреки условию теоремы. ■

ЗАМЕЧАНИЕ. Принципиальным моментом доказательства является утверждение о том, что *каждый элемент функции μ^{-1} допускает продолжение вдоль любого непрерывного пути в $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$* (оно необходимо для применения теоремы о монодромии). Это утверждение вытекает из теоремы о поднятии путей для голоморфных неразветвленных накрытий из п. 12.6. Покажем, что указанное свойство аналитического продолжения, вообще говоря, не имеет места для голоморфных, сюръективных и локально обратимых отображений, не являющихся накрытиями.

Рассмотрим функцию

$$f(z) = \int_0^z g(\zeta) d\zeta,$$

где g — произвольная непостоянная целая функция, которая является четной и не имеет нулей (в качестве g можно взять, например, функцию $g(z) = \exp(z^2)$). Покажем, что *отображение $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ голоморфно, сюръективно и локально обратимо, но некоторые элементы f^{-1} не допускают продолжения вдоль некоторых путей в $\mathbb{C}$* .

Действительно, из односвязности $\mathbb{C}$ вытекает, что интеграл в определении $f(z)$ не зависит от пути и задает целую функцию $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$. Так как производная $g := f'$ не обращается в нуль на $\mathbb{C}$, то f локально обратимо (см. теорему из п. 14.2). Покажем далее, что отображение $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ сюръективно. Действительно, функция f нечетна, поскольку ее производная g , по условию, четна. Поэтому если бы f не принимала какого-то значения $a \neq 0$, то она не принимала бы и значения $-a$, откуда по теореме Пикара

вытекало бы, что $f \equiv \text{const}$, т.е. $g \equiv 0$, что невозможно по условию. Следовательно, f принимает все значения $a \neq 0$, а значение $a = 0$ (опять же в силу нечетности) принимается ею при $z = 0$. Таким образом, отображение $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ сюръективно.

Если бы все элементы f^{-1} допускали продолжение вдоль произвольных путей в $\mathbb{C}$, то полученная аналитическая функция на $\mathbb{C}$ была бы однозначной по теореме о монодромии. Отсюда вытекало бы, что f является автоморфизмом комплексной плоскости $\mathbb{C}$ на себя, т.е. линейной функцией (см. п. 17.1), что противоречит условию $g \not\equiv \text{const}$.

Задачи. (1) Покажите, что всякая голоморфная в $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ функция, отличная от постоянной, принимает все значения из $\mathbb{C}$, за исключением, быть может, одного.

(2) Покажите, что функция $f(z) = ze^z$ принимает все значения из $\mathbb{C}$.

(3) Покажите, что мероморфная в $\mathbb{C}$ функция, отличная от постоянной, принимает все значения из $\overline{\mathbb{C}}$, за исключением, быть может, двух.

(4) Целые функции $f(z) = \sin z$ и $g(z) = \cos z$ удовлетворяют уравнению $f^2 + g^2 \equiv 1$. Существуют ли непостоянные целые функции f, g , удовлетворяющие уравнению $f^3 + g^3 \equiv 1$?

(5) Пусть $f, g \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ удовлетворяют $e^f + e^g \equiv 1$. Покажите, что $f, g \equiv \text{const}$.

(6) Верно ли, что локально обратимая функция $f \in \mathcal{O}(D)$ задает голоморфное неразветвленное накрытие $f: D \rightarrow f(D)$ тогда и только тогда, когда каждый элемент обратного отображения f^{-1} допускает аналитическое продолжение вдоль любого пути в области $f(D)$?

Лекция 24. Гармонические функции

24.1. Определение и основные свойства гармонических функций.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Вещественнозначная функция $u: D \rightarrow \mathbb{R}$ в области $D \subset \mathbb{C}$ называется *гармонической* в D , если $u \in C^2(D)$ и удовлетворяет уравнению Лапласа

$$u_{xx} + u_{yy} \equiv 0 \quad \text{в } D.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Если функция f голоморфна в области D , то ее действительная часть

$$u(z) = \operatorname{Re} f(z)$$

гармонична в D (то же самое верно и для мнимой части $v(z) = \operatorname{Im} f(z)$). Обратно, если область D односвязна и функция $u: D \rightarrow \mathbb{R}$ гармонична, то найдется (единственная с точностью до аддитивной чисто мнимой константы) функция $f \in \mathcal{O}(D)$ такая, что

$$u(z) = \operatorname{Re} f(z) \quad \text{для всех } z \in D.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если функция f голоморфна в D , то ее действительная и мнимая части $u := \operatorname{Re} f$ и $v := \operatorname{Im} f$ принадлежат $C^\infty(D)$ и удовлетворяют в D уравнениям Коши–Римана: $u_x = v_y$, $u_y = -v_x$. Из них следует, что

$$u_{xx} + u_{yy} = (v_y)_x + (-v_x)_y \equiv 0,$$

т.е. u и v гармоничны в D .

Обратно, если функция $u: D \rightarrow \mathbb{R}$ гармонична, то функция $\varphi := u_x - iu_y$ является $\mathbb{R}$ -дифференцируемой в D , поскольку $u \in C^2(D)$, и удовлетворяет в D уравнениям Коши–Римана. Действительно, $(u_x)_x = (-u_y)_y$ в силу гармоничности u , а $(u_x)_y = -(-u_y)_x$, поскольку $u \in C^2(D)$. Таким образом, функция φ голоморфна в D . Если область D односвязна, то всякая функция, голоморфная в D , имеет там первообразную. Иначе говоря, существует функция $f \in \mathcal{O}(D)$ такая, что $f' = \varphi$ в D . Записывая эту функцию в виде $f = U + iV$, будем иметь

$$f' = U_x + iV_x = U_x - iU_y$$

в силу уравнений Коши–Римана. Поэтому из $f' = \varphi$ следует, что $U_x = u_x$ и $U_y = u_y$, т.е. $(U - u)_x = (U - u)_y = 0$, и, следовательно, функция $U - u$ постоянна в D . Вычитая эту постоянную из f , получим голоморфную в D функцию f , для которой $\operatorname{Re} f = u$ в D . ■

ЗАМЕЧАНИЕ. Для неодносвязных областей D можно указать гармонические функции $u: D \rightarrow \mathbb{R}$, не являющиеся вещественными частями голоморфных. Пусть, например, $D = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ и

$$u(z) = \ln |z| = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2).$$

Тогда функция

$$u_x - iu_y = \frac{x}{r^2} - i\frac{y}{r^2} = \frac{\bar{z}}{r^2} = \frac{1}{z}$$

не имеет первообразной на $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ (см. замечание 4.9 в п. 4.5). Иными словами, функция

$$f(z) = \int_{z_0}^z (u_x - iu_y)(\zeta) d\zeta$$

(которая в данном случае равна $\ln z$) есть *многозначная* аналитическая функция на $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

ЗАДАЧИ. (1) Покажите, что две функции f_1, f_2 , голоморфные в области D и удовлетворяющие в ней соотношению $\operatorname{Re} f_1 \equiv \operatorname{Re} f_2$, отличаются на чисто мнимую аддитивную константу.

(2) Покажите, что всякая гармоническая функция $u: \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ имеет вид

$$u(z) = c \ln |z| + \operatorname{Re} f(z)$$

для некоторых $c \in \mathbb{R}$ и $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C} \setminus \{0\})$.

Приведем теперь свойства гармонических функций, непосредственно вытекающие из доказанного выше предложения.

СВОЙСТВО 24.1 (бесконечная дифференцируемость). *Если функция $u: D \rightarrow \mathbb{R}$ гармонична, то $u \in C^\infty(D)$, причем все ее частные производные также гармоничны в D .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для любой точки $z_0 \in D$ найдется ее достаточно малая окрестность $U = \{|z - z_0| < \varepsilon\}$, в которой u можно представить в виде $u = \operatorname{Re} f$ для некоторой $f \in \mathcal{O}(U)$. Тогда

из бесконечной дифференцируемости f следует бесконечная дифференцируемость u в этой окрестности. Из равенств $\partial_x f = f'$ и $\partial_y f = if'$ индукцией по k, l получаем, что все функции $\partial_x^k \partial_y^l f(z)$ голоморфны в окрестности U . Следовательно, функции

$$\partial_x^k \partial_y^l u(z) = \operatorname{Re} \partial_x^k \partial_y^l f(z)$$

гармоничны в U . ■

СВОЙСТВО 24.2 (теорема о среднем). *Если функция $u(z)$ гармонична в круге $\{|z - z_0| < R\}$, то для всех $0 \leq r < R$ справедливо равенство*

$$u(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z_0 + re^{i\theta}) d\theta.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Представим u в виде $u = \operatorname{Re} f$ для некоторой функции f , голоморфной в круге $\{|z - z_0| < R\}$, и возьмем вещественную часть от равенства

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta}) d\theta,$$

представляющего собой теорему о среднем для голоморфных функций (см. п. 5.3). ■

СВОЙСТВО 24.3 (теорема единственности). *Если функции $u_1, u_2: D \rightarrow \mathbb{R}$ гармоничны в области D и множество*

$$E := \{z \in D : u_1(z) = u_2(z)\}$$

имеет хотя бы одну внутреннюю точку, то $u_1 \equiv u_2$ в D .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Функции $\varphi_1 := u_{1x} - iu_{1y}$ и $\varphi_2 := u_{2x} - iu_{2y}$ голоморфны в D , и множество $\{z \in D : \varphi_1(z) = \varphi_2(z)\}$ имеет по условию внутреннюю точку. Отсюда по теореме единственности для голоморфных функций (см. п. 6.13) вытекает, что $\varphi_1 \equiv \varphi_2$ в D . Следовательно, $u_1(z) - u_2(z) \equiv \operatorname{const}$ в D . Подставляя в это равенство $z \in E$, получаем, что указанная константа равна нулю. ■

ЗАМЕЧАНИЕ. Если, как в теореме единственности для голоморфных функций, ослабить условие утверждения, потребовав

только, чтобы множество E имело *предельную* точку в D , то утверждение перестанет быть верным. В качестве примера можно взять функции $u_1(z) \equiv \operatorname{Im} z$, $u_2(z) \equiv 0$. Они гармоничны в $D = \mathbb{C}$ и совпадают на $E = \mathbb{R}$, но не всюду на $\mathbb{C}$.

Задачи. (1) Пусть функция $u: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ гармонична и множество нулей $u(z)$ в $\mathbb{C}$ есть в точности $\mathbb{R}$. Покажите, что $u(z) = c \operatorname{Im} z$ для некоторой константы $c \in \mathbb{R}$.

(2) Пусть l_1, l_2 – две прямые на плоскости $\mathbb{C}$. Для того чтобы нашлась гармоническая функция $u: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$, не равная тождественно нулю, которая обращается в нуль на $l_1 \cup l_2$, необходимо и достаточно, чтобы прямые l_1, l_2 либо были параллельны, либо пересекались под углом, равным рациональному кратному π .

Указание к обеим задачам: примените рассуждение из п. 14.2, чтобы представить любую голоморфную в окрестности точки z_0 функцию f в виде $f(z) = f(z_0) + g(z)^n$, где n есть порядок нуля функции $f(z) - f(z_0)$ в точке $z = z_0$, а g конформно отображает окрестность U точки z_0 на $g(U)$.

СВОЙСТВО 24.4 (принцип максимума). (1) Пусть функция $u: D \rightarrow \mathbb{R}$ гармонична в области $D \subset \mathbb{C}$. Предположим, что в некоторой окрестности $U = \{|z - z_0| < \varepsilon\} \subset D$ точки $z_0 \in D$ выполняется неравенство

$$u(z) \leq u(z_0) \quad \text{при } z \in U.$$

Тогда $u(z) \equiv \operatorname{const}$.

(2) Пусть D – ограниченная область в $\mathbb{C}$, а функция $u: \overline{D} \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывна в замыкании $\overline{D}$ и гармонична в D . Тогда

$$\max_{z \in \overline{D}} u(z) = \max_{z \in \partial D} u(z).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1) Выберем функцию f , голоморфную в окрестности U , для которой $u = \operatorname{Re} f$. Тогда функция $g(z) := e^{f(z)}$ также голоморфна в U , а ее модуль $|g(z)| = e^{u(z)}$ имеет локальный максимум в точке $z = z_0$. Из принципа максимума модуля для голоморфных функций (теорема 15.1 из п. 15.1) вытекает, что $g(z) \equiv \operatorname{const}$. Тогда функция $u(z) = \ln |g(z)|$ также постоянна.

(2) Поскольку $\overline{D}$ есть компакт, то $\max_{z \in \overline{D}} u(z)$ достигается в некоторой точке $z_0 \in \overline{D}$. Если $z_0 \in \partial D$, то утверждение доказано. Если же $z_0 \in D$, то $u \equiv \operatorname{const}$ в силу утверждения (1) и требуемое равенство также выполняется. ■

СВОЙСТВО 24.5 (теорема Лиувилля). *Если функция $u: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ гармонична на $\mathbb{C}$ и ограничена сверху, т.е.*

$$u(z) \leq M \quad \text{для всех } z \in \mathbb{C},$$

то $u \equiv \text{const}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим функцию $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$, $\text{Re } f = u$, и положим $g = e^f$, так что $|g(z)| = e^{u(z)}$. По теореме Лиувилля для голоморфных функций (см. п. 6.4) $g \equiv \text{const}$, откуда $u \equiv \text{const}$. ■

СВОЙСТВО 24.6 (инвариантность при конформных отображениях). *Если $F: D_1 \rightarrow D_2$ есть конформное отображение области D_1 на область D_2 , а функция $u: D_2 \rightarrow \mathbb{R}$ гармонична, то функция $u \circ F$ гармонична в D_1 .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В окрестности любой точки $z_0 \in D_2$ функцию u можно представить в виде $u = \text{Re } f$ для некоторой функции f , голоморфной в этой окрестности. Тогда функция $u \circ F = \text{Re}(f \circ F)$ гармонична в окрестности точки $f^{-1}(z_0)$. ■

ЗАДАЧА. Покажите, что в этом утверждении нельзя заменить $u \circ F$ на $F \circ u$. Например, если функции u и u^2 гармоничны в области D , то $u \equiv \text{const}$ в D .

ФОРМУЛА ПУАССОНА. Пусть $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$, функция $u: \overline{D} \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывна в $\overline{D}$ и гармонична в D . Тогда для всех $z \in D$ имеем

$$u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{|\zeta|^2 - |z|^2}{|\zeta - z|^2} u(\zeta) d\theta, \quad \text{где } \zeta := R e^{i\theta}. \quad (24.1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Представим функцию u в виде $u = \text{Re } f$ для некоторой функции $f \in \mathcal{O}(D)$ и предположим сначала, что $f \in \mathcal{O}(\overline{D})$. Тогда для $z \in D$ имеет место интегральная формула Коши (см. п. 5.3)

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(\zeta) \zeta}{\zeta - z} d\theta,$$

где мы воспользовались заменой $\zeta = R e^{i\theta}$. С другой стороны, симметричная $z \in D$ точка $z^* := R^2/\overline{z}$ принадлежит $\mathbb{C} \setminus \overline{D}$, поэтому

по теореме Коши (см. замечание 5.3 из п. 5.3)

$$0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(\zeta)\zeta}{\zeta - R^2/\bar{z}} d\theta.$$

Вычтем это интегральное равенство из предыдущего. Тогда, поскольку

$$\frac{\zeta}{\zeta - z} - \frac{\bar{z}\zeta}{\bar{z}\zeta - R^2} = \frac{\zeta}{\zeta - z} - \frac{\bar{z}}{\bar{z} - \bar{\zeta}} = \frac{|\zeta|^2 - |z|^2}{|\zeta - z|^2},$$

получим в результате формулу (24.1).

Теперь избавимся от предположения, что $f \in \mathcal{O}(\bar{D})$. Для всех $z \in D$ справедливо соотношение

$$f(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(z), \quad \text{где } f_n(z) := f\left(z\left(1 - \frac{1}{n}\right)\right).$$

Все функции f_n голоморфны в $\bar{D}$, следовательно, по доказанному

$$u_n(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{|\zeta|^2 - |z|^2}{|\zeta - z|^2} u_n(\zeta) d\theta, \quad \text{где } u_n := \operatorname{Re} f_n.$$

Так как последовательность $u_n(\zeta)$ сходится к $u(\zeta)$ равномерно на ∂D в силу условия $u \in C(\bar{D})$, то в последнем равенстве можно перейти к пределу при $n \rightarrow \infty$. ■

24.2. Задача Дирихле.

ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ. Дана область $D \subset \mathbb{C}$ с простой границей и непрерывная функция $\varphi: \partial D \rightarrow \mathbb{R}$. Требуется найти непрерывную в $\bar{D}$ и гармоническую в D функцию $u: \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}$ такую, что

$$u = \varphi \quad \text{на } \partial D.$$

Покажем, прежде всего, что задача Дирихле не может иметь более одного решения. Допустим, напротив, что $u_1, u_2: \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}$ — два решения задачи Дирихле с одной и той же граничной функцией φ . Применяя принцип максимума (свойство 24.4, (2) из предыдущего пункта) к функциям $u_1 - u_2$ и $u_2 - u_1$, получим, что они совпадают всюду в $\bar{D}$.

Задача Дирихле в круге решается с помощью формулы Пуассона (24.1), доказанной в предыдущем пункте.

ТЕОРЕМА. Пусть $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$ и $\varphi: \partial D \rightarrow \mathbb{R}$ — произвольная непрерывная функция на границе D . Тогда функция u , задаваемая интегралом Пуассона

$$u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{|\zeta|^2 - |z|^2}{|\zeta - z|^2} \varphi(\zeta) d\theta \quad \text{при } z \in D, \quad \zeta = Re^{i\theta}, \quad (24.2)$$

гармонична в D и непрерывно продолжается на $\overline{D}$. При этом

$$u = \varphi \quad \text{на } \partial D.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1°. Покажем сначала, что функция u , задаваемая формулой (24.2), гармонична в D .

Так как

$$\frac{|\zeta|^2 - |z|^2}{|\zeta - z|^2} = \operatorname{Re} \frac{\zeta + z}{\zeta - z},$$

то при $z \in D$ функция u совпадает с вещественной частью функции f , задаваемой интегралом вида

$$f(z) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\zeta + z}{\zeta - z} \varphi(\zeta) d\theta. \quad (24.3)$$

По лемме о голоморфной зависимости интеграла от параметра (см. п. 9.1) функция f голоморфна в D . Поэтому ее вещественная часть $u = \operatorname{Re} f$ гармонична в D .

2°. Докажем теперь, что функция u , задаваемая формулой (24.2), непрерывно продолжается на $\overline{D}$.

Обозначим через

$$P(\zeta, z) := \frac{|\zeta|^2 - |z|^2}{|\zeta - z|^2} \quad (24.4)$$

ядро Пуассона. Оно обладает следующими свойствами:

- (а) $P(\zeta, z) \geq 0$ для всех $\zeta \in \partial D$ и $z \in D$;
- (б) $\int_0^{2\pi} P(\zeta, z) d\theta = 1$ для всех $z \in D$;
- (с) при каждом $\zeta_0 \in \partial D$ справедливо соотношение

$$\lim_{D \ni z \rightarrow \zeta_0} P(\zeta, z) = 0$$

равномерно на компактах по $\zeta \in \partial D \setminus \{\zeta_0\}$; иными словами, для каждого компакта $K \subset \partial D \setminus \{\zeta_0\}$ и любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что

$$|P(\zeta, z)| < \varepsilon \quad \text{для всех } \zeta \in K \text{ и всех } z \in D \text{ с } |z - \zeta_0| < \delta.$$

Действительно, свойства (а) и (с) вытекают непосредственно из формулы (24.4) для ядра Пуассона, а свойство (b) есть частный случай (отвечающий $u \equiv 1$) формулы Пуассона (24.1).

Доопределим теперь функцию u на ∂D , полагая $u(\zeta) = \varphi(\zeta)$ при $\zeta \in \partial D$, и докажем непрерывность продолженной функции в точках $\zeta_0 \in \partial D$. Из свойства (b) вытекает, что

$$u(z) - u(\zeta_0) = \int_0^{2\pi} P(\zeta, z) \{\varphi(\zeta) - \varphi(\zeta_0)\} d\theta \quad (24.5)$$

для всех $z \in D$. Фиксируем $\varepsilon > 0$ и найдем столь малую дугу $\gamma_1 \subset \partial D$, содержащую ζ_0 , что

$$|\varphi(\zeta) - \varphi(\zeta_0)| < \varepsilon \quad \text{для всех } \zeta \in \gamma_1. \quad (24.6)$$

Положим $\gamma_2 := \partial D \setminus \gamma_1$ и представим интеграл (24.5) в виде суммы интегралов по дугам γ_1 и γ_2 (см. рис. 84):

$$\int_0^{2\pi} P(\zeta, z) \{\varphi(\zeta) - \varphi(\zeta_0)\} d\theta = I_1(z) + I_2(z),$$

где

$$I_j(z) := \int_{\gamma_j} P(\zeta, z) \{\varphi(\zeta) - \varphi(\zeta_0)\} d\theta \quad \text{для } j = 1, 2.$$

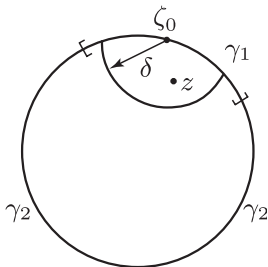


Рис. 84

Тогда интеграл по γ_1 мал ввиду оценки (24.6):

$$|I_1(z)| < \varepsilon \int_{\gamma_1} P(\zeta, z) d\theta < \varepsilon \quad \text{для всех } z \in D,$$

где мы воспользовались также свойствами (а) и (б).

Оценку второго интеграла $I_2(z)$ достаточно получить для точек z , близких к ζ_0 . А именно выберем, пользуясь свойством (с), такое $\delta > 0$, что для всех $z \in D$ с $|z - \zeta_0| < \delta$ выполняется неравенство

$$0 \leq P(\zeta, z) < \varepsilon \quad \text{при } \zeta \in \gamma_2.$$

Тогда при $|z - \zeta_0| < \delta$, $z \in D$, будет справедлива оценка

$$|I_2(z)| < \varepsilon \int_{\gamma_2} |\varphi(\zeta) - \varphi(\zeta_0)| d\theta \leq \varepsilon \int_0^{2\pi} |\varphi(\zeta) - \varphi(\zeta_0)| d\theta \leq 4\pi M\varepsilon,$$

где

$$M := \max_{\zeta \in \partial D} |\varphi(\zeta)|.$$

Следовательно, для таких z будем иметь

$$|u(z) - u(\zeta_0)| < (1 + 4\pi M)\varepsilon,$$

что и доказывает непрерывность u в точке ζ_0 . ■

СЛЕДСТВИЕ 24.1 (разрешимость задачи Дирихле в односвязной области). Пусть $D \subset \mathbb{C}$ — односвязная область с простой границей. Тогда для всякой непрерывной функции $\varphi: \partial D \rightarrow \mathbb{R}$ найдется единственная функция $u: \overline{D} \rightarrow \mathbb{R}$, которая непрерывна в $\overline{D}$, гармонична в D и удовлетворяет граничному условию:

$$u = \varphi \quad \text{на } \partial D.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По теореме Римана найдется конформное отображение $F: U \rightarrow D$ единичного круга U на область D . Это отображение продолжается по теореме Каратеодори до гомеоморфизма $F: \overline{U} \rightarrow \overline{D}$. Поэтому композиция $\varphi \circ F: \partial U \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывна на ∂U . Обозначим через $u_0: \overline{U} \rightarrow \mathbb{R}$ решение задачи Дирихле в круге U с граничной функцией $\varphi \circ F$, построенное в предыдущей теореме. Тогда

$$u := u_0 \circ F^{-1}: \overline{D} \rightarrow \mathbb{R}$$

есть решение задачи Дирихле на D с граничной функцией φ . Действительно, граничное условие на u выполняется по построению, а гармоничность u в области D вытекает из свойства инвариантности относительно конформных отображений (свойство 24.6 из предыдущего пункта). ■

Вернемся еще раз к примечательной формуле (24.3) из доказательства теоремы. Она дает способ восстановления функции, голоморфной в круге, по граничным значениям ее вещественной части на ∂D .

СЛЕДСТВИЕ 24.2 (формула Шварца). Пусть функция f голоморфна в круге $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$, а ее вещественная часть $u := \operatorname{Re} f$ непрерывно продолжается на $\overline{D}$. Тогда для всех $z \in D$ имеет место следующая формула Шварца

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\zeta + z}{\zeta - z} u(\zeta) d\theta + i \operatorname{Im} f(0). \quad (24.7)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим интеграл в правой части через $F(z)$. Тогда функция $F \in \mathcal{O}(D)$ по лемме о голоморфной зависимости интеграла от параметра (см. п. 9.1) и $\operatorname{Re} F = u$ в D по формуле Пуассона. Поэтому

$$\operatorname{Re}(F - f) = 0 \quad \text{в } D \implies F - f \equiv \text{const} \quad \text{в } D.$$

Чтобы найти указанную константу, подставим $z = 0$ в определение $F(z)$. Получим, что

$$F(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(\zeta) d\theta = u(0) = \operatorname{Re} f(0)$$

(второе равенство следует из формулы Пуассона), что доказывает формулу (24.7). ■

ЗАМЕЧАНИЕ. Отметим, что из условия следствия 24.2 (т.е. непрерывной продолжимости вещественной части $u := \operatorname{Re} f$ на $\overline{D}$), вообще говоря, не вытекает непрерывная продолжимость на $\overline{D}$ самой функции f . Рассмотрим в качестве примера функцию f , голоморфную в единичном круге D , которая задается рядом

$$f(z) = -i \sum_{n=2}^{\infty} \frac{z^n}{n \ln n} \quad \text{для } z \in D.$$

Можно показать, что ее вещественная часть $u := \operatorname{Re} f$ непрерывно продолжается на $\overline{D}$. Однако сама f не может быть непрерывно продолжена на $\overline{D}$, поскольку

$$\lim_{r \rightarrow 1-0} i f(r) = +\infty.$$

Задачи. (1) Пользуясь формулой Шварца, докажите следующее обобщение теоремы Лиувилля. Если целая функция f удовлетворяет неравенству

$$\operatorname{Re} f(z) \leq M|z|^n \quad \text{при} \quad |z| > R$$

для некоторых $M > 0$, $n \in \mathbb{N}$, $R > 0$, то она есть полином степени не выше n .

(2) Пользуясь задачей (1), дайте новые решения задачи (7) п. 13.3 и задачи (2) п. 23.2.

(3) Пусть последовательность функций f_n , голоморфных в области D , сходится в точке $z_0 \in D$, а последовательность их вещественных частей $\operatorname{Re} f_n$ сходится равномерно на компактах из D . Покажите, что последовательность f_n также сходится равномерно на компактах в D .

Дополнение. Физическая интерпретация голоморфных функций и доказательство теоремы Римана

В этом параграфе мы приведем другое, базирующееся на физических соображениях, доказательство теоремы Римана из лекции 17. Оно опирается на тесную связь уравнений Коши–Римана с некоторыми моделями математической физики. Например, как будет показано ниже, векторное поле в области $D \subset \mathbb{C}$, компоненты которого удовлетворяют уравнениям Коши–Римана, можно физически интерпретировать тремя различными способами: как поле скоростей установившегося безвихревого течения идеальной несжимаемой жидкости (считая ∂D одной из линий тока), как электростатическое поле (считая ∂D проводником) или как градиент температуры при установившемся тепловом режиме в D (считая, что на ∂D поддерживается постоянная температура).

Д.1. Гидродинамическая интерпретация конформных отображений. Начнем с гидродинамической интерпретации уравнений Коши–Римана. Что означает в этих терминах теорема Римана для односвязной области $D \subset \mathbb{C}$? Рассмотрим вначале случай единичного круга. Предположим, что этот круг заполнен идеальной несжимаемой жидкостью, и поместим в его центр точечный вихрь.

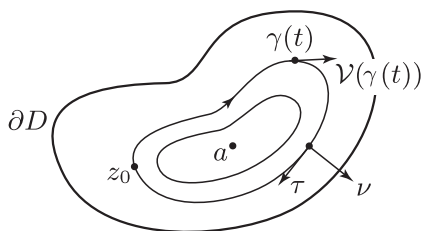


Рис. 85

Указанный вихрь породит в круге течение жидкости, траектории которого (после того, как течение установится) будут совпадать с concentрическими окружностями. Если такой же вихрь поместить в произвольную точку a односвязной области D (см. рис. 85), то линии тока будут задаваться более сложными конту-

рами, которые, однако, останутся, в силу односвязности D , простыми замкнутыми кривыми, охватывающими точку a (включая границу ∂D , являющуюся одной из линий тока). Поскольку оба течения (как в круге, так и в области D) описываются уравнениями Коши–Римана, естественно ожидать, что конформное отображение области D на единичный круг, переводящее точку a в начало координат, преобразует линии тока одного течения в линии тока другого. Пользуясь этим соображением, можно построить конформное отображение D на круг. Такова исходная идея доказательства теоремы Римана, близкая к подходу самого Римана. Хотя приведенные физические соображения и нелегко довести до строгого доказательства, они, тем не менее, наглядно демонстрируют, как можно было до этой теоремы “догадаться”, а также дают пример использования комплексного анализа при изучении различных физических моделей.

Всякое гладкое (класса C^1) отображение

$$\mathcal{V} = (V_1, V_2): D \rightarrow \mathbb{R}^2,$$

заданное в области $D \subset \mathbb{C}$, можно рассматривать как *поле скоростей установившегося течения жидкости в D* . А именно указанное отображение задает векторное поле $\mathcal{V}(z)$ в области D , интегральные кривые которого совпадают с линиями тока жидкости. Более подробно, траектория частицы жидкости, находившейся в начальный момент времени $t = 0$ в точке $z_0 \in D$, будет задаваться интегральной кривой $\gamma(t) \subset D$ поля $\mathcal{V}$, проходящей через точку z_0 и удовлетворяющей условию

$$\dot{\gamma}(t) = \mathcal{V}(\gamma(t)) \quad \text{для всех } t.$$

Добавим еще, что термин “установившееся течение” означает, что скорость течения $\mathcal{V}(z)$ зависит только от точки $z = x + iy \in D$, но не от времени t .

Течение $\mathcal{V} = (V_1, V_2)$ называется *несжимаемым*, если

$$V_{1x} + V_{2y} = 0 \quad \text{в } D,$$

и *безвихревым*, если

$$V_{2x} - V_{1y} = 0 \quad \text{в } D.$$

Чтобы пояснить эту терминологию, рассмотрим интеграл от функции $V_1 - iV_2$ по произвольной замкнутой кривой $\gamma: [0, 1] \rightarrow D$.

Его можно записать в виде суммы интегралов от вещественных 1-форм:

$$\int_{\gamma} (V_1 - iV_2) dz = \int_{\gamma} (V_1 dx + V_2 dy) + i \int_{\gamma} (-V_2 dx + V_1 dy) =: \Gamma + iN.$$

Интеграл Γ можно записать иначе как

$$\Gamma = \int_{\gamma} (\mathcal{V} \cdot \tau) ds,$$

где $\tau(t)$ — единичный касательный вектор к траектории γ в точке $\gamma(t)$. Он называется *циркуляцией* поля $\mathcal{V}$ вдоль γ . С другой стороны, интеграл N можно переписать в виде

$$N = \int_{\gamma} (\mathcal{V} \cdot \nu) ds,$$

где $\nu(t)$ — единичный вектор нормали к γ в точке $\gamma(t)$. Он называется *поток*ом поля $\mathcal{V}$ через γ .

Если γ совпадает с границей ∂D_1 некоторой подобласти $D_1 \in D$, то по формуле Грина–Стокса

$$\Gamma = \int_{D_1} (-V_{1y} + V_{2x}) dx dy \quad \text{и} \quad N = \int_{D_1} (V_{2y} + V_{1x}) dx dy.$$

Таким образом, условие несжимаемости жидкости означает, что поток через границу любой подобласти равен нулю (сколько жидкости втекает в подобласть, столько из нее и вытекает), а условие отсутствия вихрей эквивалентно тому, что циркуляция вдоль границы любой подобласти равна нулю (течение не закручивается вдоль этой границы).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ Д.1. Пусть $D \subset \mathbb{C}$ — односвязная область и a — произвольная точка в D . Тогда формула

$$f' = V_1 - iV_2 \quad \text{на } D \tag{Д.1}$$

задает взаимно однозначное соответствие между множеством всех функций $f \in \mathcal{O}(D)$ с $f(a) = 0$ и множеством всех векторных полей $\mathcal{V}$ на D , удовлетворяющих условиям несжимаемости и отсутствия вихрей

$$V_{1x} + V_{2y} = 0, \quad V_{2x} - V_{1y} = 0. \tag{Д.2}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Условия (Д.2) суть в точности уравнения Коши–Римана для функции $g := V_1 - iV_2$. С другой стороны, в односвязной области D всякая функция $g \in \mathcal{O}(D)$ имеет единственную первообразную $f \in \mathcal{O}(D)$ с $f(a) = 0$. ■

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Функция $f \in \mathcal{O}(D)$ из предложения Д.1 называется *комплексным потенциалом* течения $\mathcal{V}$. Ее вещественная часть $u = \operatorname{Re} f$ является *потенциалом* поля $\mathcal{V}$ в обычном смысле:

$$V_1 = u_x, \quad V_2 = u_y.$$

Поясним, почему в качестве главной комплексной характеристики течения $\mathcal{V}$ выбирается первообразная от $V_1 - iV_2$, а не сама функция $V_1 - iV_2$. Важность комплексного потенциала f объясняется тем, что задаваемая им конформная замена координат $w = f(z)$ локально выпрямляет линии тока течения $\mathcal{V}$ вблизи неособых точек. Приведем более подробную формулировку, которая мотивирует конструкцию конформного отображения D на круг, данную в следующем пункте.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ Д.2. Пусть выполнены условия предложения Д.1 и точка $z_0 \in D$ такова, что $\mathcal{V}(z_0) \neq 0$. Тогда $w = f(z)$ есть конформное отображение некоторой окрестности точки z_0 на окрестность точки $w_0 = f(z_0)$, переводящее линии тока $\mathcal{V}$ в горизонтальные отрезки.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Конформность отображения $w = f(z)$ в окрестности точки z_0 вытекает из критерия локальной обратимости голоморфных функций в п. 14.2, поскольку $f'(z_0) \neq 0$ по условию. Рассмотрим линии тока поля $\mathcal{V}$, т.е. пути $\gamma: [0, 1] \rightarrow D$ такие, что

$$\dot{\gamma}(t) = \mathcal{V}(\gamma(t)) \quad \text{при } t \in [0, 1].$$

Представим γ и f в виде $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$ и $f(z) = u(z) + iv(z)$. При этом равенство (Д.1) перепишется с учетом уравнений Коши–Римана в виде

$$V_1 - iV_2 = f' = v_y + iv_x,$$

откуда

$$\frac{d}{dt}\{v(\gamma(t))\} = v_x(\gamma(t))\dot{x}(t) + v_y(\gamma(t))\dot{y}(t) = -V_2V_1 + V_1V_2 = 0.$$

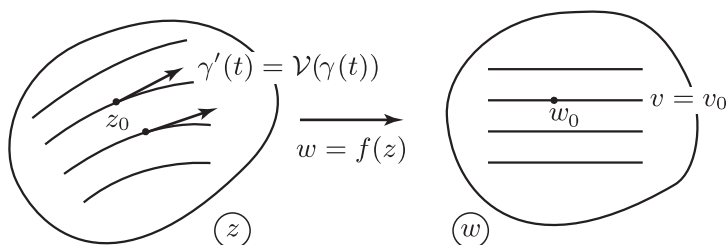


Рис. 86

Таким образом, функция v постоянна на линиях тока поля $\mathcal{V}$ и образы этих линий при отображении $w = f(z) = u(z) + iv(z)$ лежат на горизонтальных прямых $\{v = v_0\}$ плоскости w (см. рис. 86). Поскольку эти образы связны, непусты и не сводятся к точке, они являются отрезками. ■

Если область D неодносвязна, то функция f , задаваемая формулой (Д.1) из предложения Д.1, может оказаться многозначной.

Рассмотрим в качестве примера *точечный источник мощности* $N_0 > 0$. Создаваемое им поле $\mathcal{V}$ в области $D = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ имеет линиями тока лучи $\{\arg z = \text{const}\}$ (см. рис. 87). При этом модуль $|\mathcal{V}(z)|$ постоянен на каждой окружности $\{|z| = r\}$, а поток поля $\mathcal{V}$ через эту окружность равен N_0 . Вычислим комплексный потенциал f поля $\mathcal{V}$. Обозначим через $k(r)$ значение $|\mathcal{V}(z)|$ при $|z| = r$.

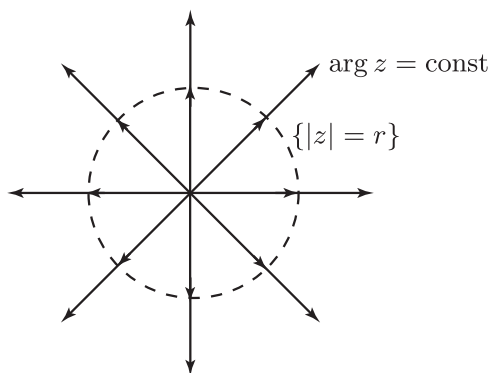


Рис. 87

Тогда

$$V_1 - iV_2 = k(r)\frac{x}{r} - ik(r)\frac{y}{r} = \frac{k(r)}{r}\bar{z}.$$

Отсюда

$$\begin{aligned}\int_{|z|=r} (V_1 - iV_2) dz &= \frac{k(r)}{r} \int_{|z|=r} \bar{z} dz \\ &= \frac{k(r)}{r} \int_0^{2\pi} re^{-i\theta} ire^{i\theta} d\theta = 2\pi i r k(r).\end{aligned}$$

Мнимая часть интеграла

$$\int_{|z|=r} (V_1 - iV_2) dz = \Gamma + iN$$

должна равняться N_0 , поэтому $k(r) = N_0/(2\pi r)$. Тем самым, формула (Д.1) из предложения Д.1 принимает вид

$$f'(z) = \frac{N_0}{2\pi r} \cdot \frac{x - iy}{r} = \frac{N_0}{2\pi z} \implies f(z) = \frac{N_0}{2\pi} \ln z + \text{const},$$

откуда следует, что комплексный потенциал точечного источника действительно многозначен. Заметим, что, формально, подобные рассуждения можно провести и в случае, когда $N_0 < 0$, только направление линий тока поменяется при этом на противоположное. Этот случай отвечает *точечному стоку мощности* $|N_0|$.

Можно также, заменяя $f(z)$ на $-if(z)$, добиться того, что линии тока и ортогональные к ним *эквипотенциальные линии* (т.е. множества уровня функции $u(z)$) поменяются местами. В этом случае комплексный потенциал

$$f_1(z) = \frac{\Gamma_0}{2\pi i} \ln z + \text{const} \quad (\text{Д.3})$$

будет задавать векторное поле на $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, имеющее линиями тока окружности $\{|z| = r\}$, циркуляция вдоль которых равна Γ_0 . Такое поле отвечает полю скоростей *точечного вихря мощности* Γ_0 , расположенного в начале координат (см. рис. 88).

Изучим более подробно *точечные вихри в произвольной односвязной области* $D \subset \mathbb{C}$ с кусочно гладкой границей. Выберем точку $a \in D$ и рассмотрим поле скоростей $\mathcal{V}$ установившегося течения в D , создаваемого точечным вихрем мощности Γ_0 ,

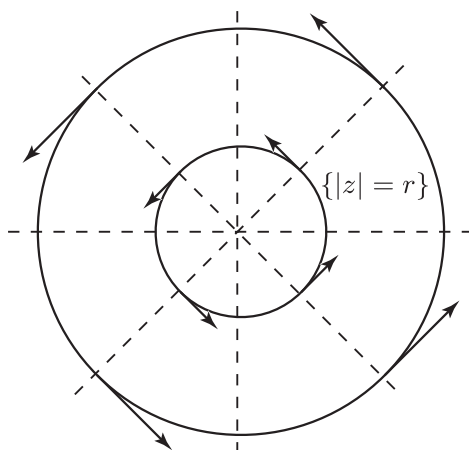


Рис. 88

помещенным в точку a . Что можно сказать о компонентах $V_1, V_2: D \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{R}$ поля $\mathcal{V}$ и о его линиях тока (интегральных кривых)? Ответ на этот вопрос суммируется в трех следующих утверждениях:

- (1) функция $V_1 - iV_2$ голоморфна в $D \setminus \{a\}$ и непрерывна на $\overline{D} \setminus \{a\}$;
- (2) имеет место соотношение

$$\lim_{z \rightarrow a} \left\{ (V_1 - iV_2)(z) - \frac{\Gamma_0}{2\pi i} \frac{1}{z - a} \right\} = 0;$$

- (3) все линии тока поля $\mathcal{V}$ суть замкнутые кусочно гладкие жордановы кривые, обходящие точку a один раз, причем граница ∂D является одной из линий тока (см. рис. 89).

Первое из этих утверждений уточняет установленное выше соответствие между течениями жидкости и голоморфными функциями. Второе означает, что течение $\mathcal{V}$ вблизи точки $a \in D$ ведет себя “приблизительно” так же, как в рассмотренном выше случае точечного вихря на комплексной плоскости (иными словами, производная $V_1 - iV_2$ комплексного потенциала течения $\mathcal{V}$ близка в окрестности точки a к производной комплексного потенциала точечного вихря на $\mathbb{C}$). Тем самым, граница ∂D оказывает “слабое” влияние на поведение вихря в окрестности точки a . Третье

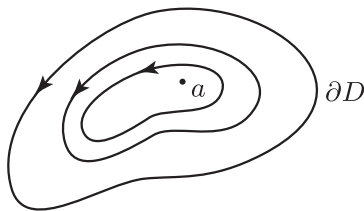


Рис. 89

утверждение демонстрирует влияние границы ∂D на топологию линий тока. В этом утверждении важно, что граница ∂D связна (что эквивалентно односвязности области D).

Приняв на веру существование векторного поля $\mathcal{V}$ в области $D \setminus \{a\}$, обладающего перечисленными свойствами (1)–(3), мы построим в следующем пункте конформное отображение области D на единичный круг, переводящее точку a в начало координат.

Д.2. “Физическое” доказательство теоремы Римана.

Из свойств (1), (2) векторного поля $\mathcal{V}$, введенного в конце предыдущего пункта, вытекает, что функция $V_1 - iV_2$ имеет при $z = a$ полюс первого порядка с вычетом, равным $\Gamma_0/(2\pi i)$. Поэтому комплексный потенциал

$$f(z) := \int_{z_0}^z (V_1 - iV_2)(\zeta) d\zeta$$

течения $\mathcal{V}$ является аналитической функцией в области $D \setminus \{a\}$, которая имеет при $z = a$ логарифмическую точку ветвления. Более точно, интегрируя соотношение в свойстве (2), мы видим, что функция

$$\varphi(z) := f(z) - \frac{\Gamma_0}{2\pi i} \ln(z - a)$$

однозначна и голоморфна всюду в D , включая точку a . Иными словами, функция

$$F(z) := \exp\left\{\frac{2\pi i}{\Gamma_0} f(z)\right\} = (z - a) \exp\left\{\frac{2\pi i}{\Gamma_0} \varphi(z)\right\} \quad (\text{Д.4})$$

однозначна и голоморфна всюду в D , непрерывна в $\overline{D}$ и имеет нуль первого порядка при $z = a$. Выберем константу интегрирования, входящую в определение потенциала $f(z)$ (иначе говоря,

фиксируем начальную точку $z_0 \in D \setminus \{a\}$, так, чтобы граница ∂D была нулевой линией уровня $\{v = 0\}$ функции $v(z) := \operatorname{Im} f(z)$. (Заметим, что функция v однозначна в $\overline{D} \setminus \{a\}$, поскольку “период” Γ_0 функции f является вещественным, а также постоянна на ∂D в силу свойства (3) поля $\mathcal{V}$).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ Д.3. *Функция $\zeta = F(z)$ осуществляет конформное отображение области D на круг $\{|\zeta| < 1\}$, переводящее точку a в начало координат.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно формуле (Д.4)

$$|F(z)| = \exp \left\{ \operatorname{Re} \left(\frac{2\pi i}{\Gamma_0} f(z) \right) \right\} = \exp \left(-\frac{2\pi}{\Gamma_0} v(z) \right) \quad (\text{Д.5})$$

для всех $z \in D$. Отсюда следует, что $v(z) \rightarrow +\infty$ при $z \rightarrow a$, поскольку $|F(a)| = 0$. Тогда, применяя принцип максимума к функции $|F(z)|$ в области $D \setminus \{|z - a| < \varepsilon\}$, получим, что $v(z) > 0$ для всех $z \in D \setminus \{a\}$. Кроме того, из формулы (Д.5) вытекает, что каждая линия тока $\{v = c\}$, $0 \leq c < +\infty$, переходит при отображении $\zeta = F(z)$ в некоторое подмножество отвечающей ей окружности $\{|\zeta| = \exp(-\frac{2\pi}{\Gamma_0} c)\}$.

Рассмотрим множества

$$D_c := \{z \in D : v(z) > c\}, \quad \text{где } 0 < c < +\infty.$$

(см. рис. 90). Ввиду свойства (3) поля $\mathcal{V}$ из предыдущего пункта они являются областями с простой границей $\partial D_c := \{z \in D : v(z) = c\}$. Для того чтобы доказать, что $\zeta = F(z)$ конформно отображает область D на круг $\{|\zeta| < 1\}$, достаточно проверить, что *каждое множество D_c , $0 < c < +\infty$, биективно отображается функцией $\zeta = F(z)$ на круг $U_c := \{|\zeta| < \exp(-\frac{2\pi}{\Gamma_0} c)\}$.*

Но мы уже показали, что $F(\partial D_c) \subset \partial U_c$. В частности, для любой точки $\zeta_0 \in U_c$ имеем: $|F(z)| > |\zeta_0|$ на ∂D_c . Поэтому для нахождения числа прообразов точки ζ_0 при отображении $\zeta = F(z)$ можно воспользоваться принципом аргумента (п. 13.2) и теоремой Руше (п. 13.3):

$$\begin{aligned} & \{\text{число нулей } F(z) - \zeta_0 \text{ в } D_c\} \\ &= \frac{1}{2\pi} \Delta_{z \in \partial D_c} \arg(F(z) - \zeta_0) = \frac{1}{2\pi} \Delta_{z \in \partial D_c} \arg F(z) = 1. \end{aligned}$$

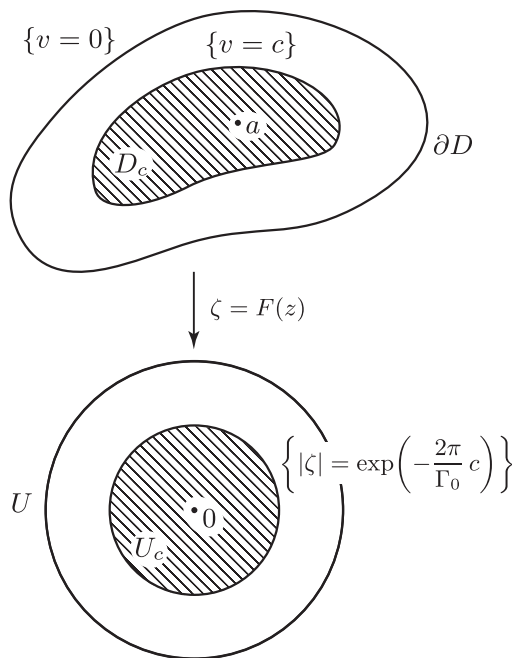


Рис. 90

Последнее равенство в этой цепочке вытекает (по принципу аргумента) из того, что функция $F(z)$ имеет в области D_c , согласно (Д.4), единственный нуль $z = a$ порядка 1. Далее, для любой точки $\zeta_0 \in \mathbb{C} \setminus \overline{U}_c$ имеем по тем же соображениям:

$$\begin{aligned} & \{\text{число нулей } F(z) - \zeta_0 \text{ в } D_c\} \\ &= \frac{1}{2\pi} \Delta_{z \in \partial D_c} \arg(F(z) - \zeta_0) = \frac{1}{2\pi} \Delta_{z \in \partial D_c} \arg \zeta_0 = 0. \end{aligned}$$

Таким образом, функция F принимает в D_c каждое значение из U_c ровно по одному разу и не принимает ни одного значения из $\mathbb{C} \setminus \overline{U}_c$. Значения из ∂U_c также не могут приниматься в D_c по принципу сохранения области. Следовательно, F биективно отображает D_c на U_c , что доказывает требуемое утверждение. ■

Задачи. (1) Покажите, что ни в какой односвязной области $D \subset \mathbb{C}$ с кусочно гладкой границей нельзя создать установившееся течение, которое не имело бы в $\overline{D}$ источников, вихрей или иных особенностей.

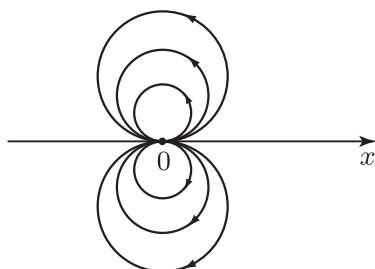


Рис. 91

Действительно, если бы такое течение существовало, то его комплексный потенциал f должен был бы удовлетворять условию

$$f \in \mathcal{O}(D) \cap C(\overline{D}) \quad \text{и} \quad \operatorname{Im} f(z) \equiv \operatorname{const} \quad \text{при} \quad z \in \partial D.$$

Покажите, что в этом случае $f \equiv \operatorname{const}$.

(2) Рассмотрим векторное поле $\mathcal{V}$ на $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ с комплексным потенциалом $f(z) = 1/z$ (особенность этого поля при $z = 0$ называется *точечным диполем*). Покажите, что его линии тока — окружности, касающиеся вещественной оси в начале координат (см. рис. 91).

(3) Пусть $D \subset \mathbb{C}$ — односвязная область с кусочно гладкой границей. Поместим диполь из предыдущей задачи в точку $a \in D$ и обозначим через $f(z)$ комплексный потенциал получившегося в D течения. Указанное течение имеет сепаратрису (см. рис. 92). Исходя из этого сформулируйте для данного случая аналоги свойств (1)–(3) из п. Д.1. Пользуясь ими, найдите образ области D при отображении $w = f(z)$ и покажите, что f конформно отображает D на $f(D)$. Это дает еще один вариант “физического” доказательства теоремы Римана.

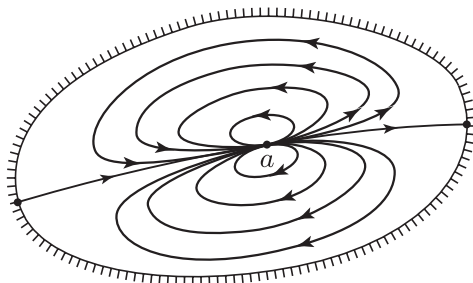


Рис. 92

Д.3. Другие физические интерпретации голоморфных функций.

(А) *Электростатика*. Обозначим через $\mathcal{V}(z)$ напряженность электростатического поля в точке $z \in D$ (т.е. силу, с которой поле действует на единичный пробный заряд, находящийся в точке z ; обычно она обозначается через $\mathbf{E}$). Пользуясь обозначениями из п. Д.1, рассмотрим поток

$$N = \int_{\partial D_1} \mathcal{V} \cdot \nu \, ds = \int_{D_1} (V_{1x} + V_{2y}) \, dx \, dy$$

поля $\mathcal{V}$ через границу произвольной подобласти $D_1 \Subset D$ и циркуляцию

$$\Gamma = \int_{\partial D_1} \mathcal{V} \cdot \tau \, ds = \int_{D_1} (V_{2x} - V_{1y}) \, dx \, dy$$

вдоль этой границы. Тогда $N/(4\pi)$ совпадает с полным электрическим зарядом внутри D_1 (теорема Гаусса), а Γ равно работе поля по перемещению пробного заряда вдоль ∂D_1 . Поэтому условие несжимаемости $V_{1x} + V_{2y} = 0$ из п. Д.1 интерпретируется теперь как условие отсутствия зарядов в D . Условие отсутствия вихрей $V_{2x} - V_{1y} = 0$ означает, в свою очередь, что электростатическое поле не требует затрат энергии для своего поддержания. (Если бы циркуляция поля $\mathcal{V}$ вдоль ∂D_1 была отлична от нуля, то перемещение пробного заряда вдоль ∂D_1 дало бы вечный двигатель.)

При выполнении указанных условий функция

$$f(z) = \int_{z_0}^z (V_1 - iV_2)(\zeta) \, d\zeta + \text{const}$$

будет, как и в п. Д.1, корректно определена и голоморфна в каждой односвязной подобласти $D_1 \subset D$. Функция $u(z) := \text{Re } f(z)$ называется *потенциалом* поля $\mathcal{V}$ и удовлетворяет уравнениям

$$u_x = V_1, \quad u_y = V_2.$$

Формула для циркуляции Γ показывает, что $u(z_1) - u(z_2)$ есть работа поля по перемещению пробного заряда из точки $z_1 \in D$ в точку $z_2 \in D$.

С учетом этого (в отличие от гидродинамического случая, когда мы налагали на комплексный потенциал $f = u + iv$ условие $v \equiv \text{const}$ на ∂D) в электростатическом случае нужно требовать,

чтобы $u \equiv \text{const}$ на ∂D , и считать границу ∂D проводником. Соответственно, картинка из доказательства теоремы Римана (т.е. семейство прообразов окружностей $\{|\zeta| = r\}$ при конформном отображении $\zeta = F(z)$ области D на круг $\{|\zeta| < 1\}$) изображает теперь *эквипотенциальные линии поля в D , создаваемого точечным зарядом, находящимся в точке a .*

(В) *Термостатика.* Обозначим через $u(z, t)$ температуру среды, заполняющей область $D \subset \mathbb{C}$, взятую в точке $z \in D$ в момент времени t . Согласно линейной модели теплопроводности функция $u(z, t)$ удовлетворяет уравнению

$$u_t = c(u_{xx} + u_{yy}), \quad \text{где } c > 0 \text{ — константа.}$$

Если режим установился (т.е. u не зависит от t), мы приходим к уравнению Лапласа

$$u_{xx} + u_{yy} = 0.$$

В этом случае векторное поле $\mathcal{V} := (u_x, u_y)$ удовлетворяет уравнениям $V_{2x} - V_{1y} = 0$ (по самому определению) и $V_{1x} + V_{2y} = 0$ (в силу уравнения Лапласа). Поэтому рассуждения из п. Д.1 о связи поля $\mathcal{V}$ с голоморфными функциями сохраняют силу и в данной ситуации.

Заметим, что решение задачи Дирихле, рассмотренной в лекции 24, с термостатической точки зрения описывает распределение температуры установившегося теплового режима в односвязной области $D \subset \mathbb{C}$ с простой границей, задаваемое распределением температуры на ∂D . Картинка из доказательства теоремы Римана, с точки зрения термостатики, изображает *изотермы установившегося теплового режима в D , создаваемого точечным источником тепла, помещенным в точку $a \in D$, при условии, что на границе ∂D поддерживается (не зависящая от времени) постоянная температура.*

Список литературы

- [1] Гурвиц А., Курант Р., *Теория функций*. — М.: Наука, 1968, первое издание 1922.
- [2] Поля Г., Серё Г., *Задачи и теоремы из анализа*. — М.: Наука, 1978, первое издание 1925.
- [3] Привалов И. И., *Введение в теорию функций комплексного переменного*. — М.: Наука, 1984, первое издание 1934.
- [4] Маркушевич А. И., *Теория аналитических функций*. Т. 1, 2. — М.: Наука, 1968, первое издание 1950.
- [5] Волковысский Л. И., Лунц Г. Л., Араманович И. Г., *Сборник задач по теории функций комплексного переменного*. — М.: Наука, 1970, первое издание 1960.
- [6] Картан А., *Элементарная теория аналитических функций одного и нескольких комплексных переменных*. — М.: ИЛ, 1963, первое издание 1961.
- [7] Евграфов М. А., *Аналитические функции*. — М.: Наука, 1991, первое издание 1965.
- [8] Rudin W., *Real and complex analysis*. — New York: McGraw-Hill, 1987, первое издание 1966.
- [9] Шабат Б. В., *Введение в комплексный анализ. Часть 1. Функции одного переменного*. — М.: Наука, 1985, первое издание 1968.
- [10] Евграфов М. А. (ред.), *Сборник задач по теории аналитических функций*. — М.: Наука, 1972, первое издание 1969.

Учебное издание

А. В. Домрин, А. Г. Сергеев

**Лекции по комплексному анализу
Часть II. Второе полугодие**

Ответственный за выпуск *А. Д. Изаак*
Компьютерная верстка и рисунки *О. Г. Мисюриной*

Сдано в набор 21.06.2004. Подписано в печать 20.10.2004.
Формат 60×90/16. Усл. печ. л. 8,5. Тираж 200 экз.

Отпечатано в Математическом институте им. В. А. Стеклова РАН
Москва, 119991, ул. Губкина, 8.

<http://www.mi.ras.ru/spm/> e-mail: spm@mi.ras.ru